Sujet 1

Question de cours :

Donner et démontrer une caractérisation simple des sous-corps. Mq $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un ss-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice n° 1 :

Soit A un anneau commutatif.

1] Montrer que l'ensemble $Nil(A)$ des éléments nilpotents de A est stable par addition et multiplication. Cela reste-t-il vrai si A n'est plus supposé commutatif ?

2] Si $a \in Nil(A)$, montrer que $1-a \in A^\times$.

Exercice n° 2 :

Soit G un groupe fini abélien. On pose l'exposant de G, noté $\exp(G)$, le plus petit entier naturel t.q. $\forall g \in G,\ g^{\exp(G)} = e$.

1] Mq : $\exp(G) = \bigvee_{x \in G} o(x)$ (ppcm)

2] Montrer qu'il existe $y \in G$ tq $o(y) = \exp(G)$

[On rappelle que si $o(x) \wedge o(y) = 1$, alors $o(xy) = o(x) \times o(y)$].

Exercice n° 3 :

Soit K un corps et $G \subset K^\times$ un groupe fini. Montrer que G est cyclique.

[Ind : On pourra utiliser l'exercice 2, et utiliser qu'un polynôme de degré n sur K a au plus n racines dans K]

Sujet 2

Question de cours :

Donner et démontrer la classification des groupes monogènes (à isomorphisme près)

Exercice n° 1 :

1] Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2027}.

2] Dire si les permutations suivantes sont dans le groupe alterné

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) σ^{2026}

Exercice n° 2 : (Central - Supélec)

On dit qu'un anneau est régulier si : $\forall x \in A,\ \exists u \in A,\ xux = x$.

1] a) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il régulier ?

b) Si K est un corps, K est-il régulier ?

c) Mq $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est régulier. (E ev)

2] Soit $A = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$ Trouver U tq $AUA = A$.

3] Donner une CNS pour que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \times)$ soit régulier.

Sujet 3

Question de cours :

Donner la déf. de la signature et montrer que c'est un morphisme surjectif dans $(\{\pm 1\}, \times)$.

Exercice n° 1 : (CCINP)

Soit G un groupe, $A, B \subset G$. On suppose G abélien

1] Montrer que si $Card(A) + Card(B) > Card(G)$, alors $A + B = G$.

2] Soit $H = \{x \in G : A = x + A\}$. Mq H est un ss-groupe de G

3] Mq $Card(A+B) = Card(A)$ ssi $\exists b \in G,\ B \subset b + H$

Exercice n° 2 :

Soit p premier impair et $u : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$. On peut voir u comme une permutation de $[\![0; p-1]\!]$. Trouver $\varepsilon(u)$.

Exercice n° 3 : (X)

Soit G un ss-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ est indénombrable.

Intercalaire N°