Sujet 1

Question de cours : Énoncer le critère spécial pour les séries à termes alternés, et le démontrer.

Exercice n° 1 :

Déterminer la nature la la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Exercice n° 2 : (CCINP)

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)^2$

Q1 Mq $\sum u_n$ diverge

Q2 Donner un équivalent de u_n

Q3 En déduire la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

Exercice n° 3 : (X)

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$

Sujet 2

Question de cours : Énoncer le théorème de sommation des o. Montrer le théorème de Cesàro

Exercice n° 1 : (Mines)

Déterminer la nature de la série $\sum \cos(n^2 \pi \ln(\frac{n}{n+1}))$

Exercice n° 2 :

Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice n° 3 :

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Exercice n° 4 :

Construire une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $|z_n - z_m| \geq 1$, $\forall n \neq m$, et $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ diverge.

Sujet 3

Question de cours : Donner (et démontrer) un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$.

Exercice n° 1 :

Nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

Exercice n° 2 :

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tq $\lim_{n \to +\infty} a_n (a_n^2 + \dots + a_{n^2}^2) = 1$.

Q1 Mq $a_n \to 0$ et que $\sum a_n^2$ diverge

Q2 On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Mq

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Q3 Mq $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$

Exercice n° 3 :

Soit la suite définie par :

$u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Déterminer la cv ou non suivant u_0, puis donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in]0;1[$.