Question de cours : Démontrer qu'une réunion dénombrable d'ensemble dénombrables est dénombrable. Démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice n°1 : (CCINP)

On considère la série $\sum_{n\geq n_0} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1) Mq au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

2) En déduire que $\sum_{n\geq n_0} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ cv.

3) La série est-elle abs cv ?

Exercice n°2 : (Mines)

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Les familles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^{|\alpha|}}\right)_{\substack{p,q\\ \geq 0}}$ sont-elles sommables ?

Exercice n°3 : (CCINP)

Soit A une algèbre de dim finie. On note 1_A l'unité et on munit A d'une norme d'algèbre :

$\forall u,v\in A,\ \|uv\|\leq\|u\|\cdot\|v\|$.

1) Soit $u\in \mathring{B}_A(0,1)$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge. En déduire que $1_A - u\in A^\times$.

2) Démontrer que $\forall u\in A$, $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}$ est cv.

Question de cours : Mq toute famille sommable est à support dénombrable.

Exercice n°1 : (Mines)

1) Mq $\forall x\in]-1,1[$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^{k-p}$

2) Soit (u_n) sommable, $\lambda\in]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k$. Mq (v_n) est sommable et calculer sa somme.

Exercice n°2 :

Montrer que toute $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ est de cardinal indénombrable.

[On rappelle que $(e_i)_{i\in I}$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ si $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists (\lambda_x^i)_{i\in I}\in\mathbb{Q}^I$ à support fini, tq $x = \sum_{i\in I}\lambda_x^i e_i$].

Exercice n°3 :

Calcul de la somme de la série :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$

[On pourra mq $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1\frac{(-t)^{n-1}}{1+t}$]

Question de cours : Déf d'une série dans un evn de dim finie. Déf d'absolue convergence. Mq dans un evn de dim finie, Abs cv $\Rightarrow$ cv (on admettra le cas en dim 1).

Exercice n°1 :

Soit pour $n\geq 2$: $u_n = \frac{f_n(n)}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$.

1) Nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$

2) Soit $N\geq 2$ et $S_N = \sum_{n=2}^{N} u_n$. Donner un équivalent de S_N puis un DA jusqu'à un $o(1)$.

3) Exprimer $S = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ en fonction de $f_n(2)$ et de γ la constante d'Euler.

Exercice n°2 :

L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, est-il dénombrable ?