Sujet 1

Question de cours : Définition de l'adhérence et caractérisation séquentielle (énoncé + démo)

Exercice n° 1 :

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornée ?

(1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

(2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2 < 1\}$

(3) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in \mathbb{Q}\}$

Exercice n° 2 :

Soit E un evn de dim finie et C un convexe de E. Montrer que si C est dense dans E, alors $C = E$.

Exercice n° 3 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt .$$

(1) Montrer que N_a est une norme

(2) Montrer que si $a, b \in [0;1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

(3) Pour quels $a \in \mathbb{R}$ la suite $\left(\frac{X}{2}\right)^n$ est convergente ?

Sujet 2

Question de cours : Définition de la densité + montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ pour une norme qu'on précisera.

Exercice n° 1 :

Soit C un convexe d'un evn E. Montrer que $\bar{C}$ et $\mathring{C}$ sont encore convexes.

Exercice n° 2 :

Soit $A \subset E$. On pose $d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$.

Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne, i.e. :

$$\forall x,y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Exercice n° 3 : (Mines)

Soit $E = \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice n° 4 :

Soit $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que f est à support compact si $\exists M > 0$ tq $\forall |x| \geq M$, $f(x) = 0$.

Déterminer l'adhérence des fonctions dans E à support compact pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Sujet 3

Question de cours : Énoncer le théorème de Weierstrass. Donner un contre-exemple sur $\mathbb{R}$, sur $]0;1[$.

Exercice n° 1 :

Soit $S = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : M^2 = I_n\}$.

1) Montrer que I_n est un point isolé de S

2) Quels sont les points isolés de S ?

3) S est-il fermé ? compact ?

Exercice n° 2 :

1) Soit E un préhilbertien et $u_1, \dots, u_n \in E$. Calculer $\sum_\sigma \left\| \sum_{i=1}^n \sigma(i) u_i \right\|^2$, où σ parcourt l'ensemble $\{-1,1\}^{[\![1;n]\!]}$.

2) On se place dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est équivalente à aucune norme euclidienne

3) Même question pour la norme $\|\cdot\|_p$, pour $p \in [1;+\infty[\setminus \{2\}$.