Sujet 3

Exercice n° 1 :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

La suite $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est décroissante, donc par le CSSA, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ est convergente.

Par critère de Riemann, $\sum \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge. Donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ est convergente.

Exercice n° 2 :

Q1 Par l'absurde, si a_n ne converge pas vers 0, alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \geq 0$, $\exists m_N \in \mathbb{N}$, $|a_m| > \varepsilon$.

En particulier, on peut construire une sous-suite $a_{\varphi(n)}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_{\varphi(n)}| > \varepsilon$.

On a alors $\sum_{n=1}^{\varphi(N)} a_n^2 \geq \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}^2 \geq N\varepsilon^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

et $a_{\varphi(N)} \sum_{n=1}^{\varphi(N)} a_n^2 \geq \varepsilon N \varepsilon^2 = N\varepsilon^3 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, absurde !

Donc $a_n \to 0$ et comme $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times a_n \to 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \to +\infty$.

Q2
$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2\,dt = \frac{1}{3}\left(S_n^3 - S_{n-1}^3\right) = \frac{1}{3}\left(\left(a_n^2 + S_{n-1}\right)^3 - S_{n-1}^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(a_n^6 + 3a_n^4 S_{n-1} + 3a_n^2 S_{n-1}^2\right)$$

Mais $a_n S_{n-1} \to 1$ et $a_n \to 0$, d'où

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}(0+0+3) = 1$$

Q3 On a $\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2\,dt \sim 1$

Par sommation des relations de comparaisons : $\int_{S_0}^{S_n} t^2\,dt \sim n$.

Mais $\int_{S_0}^{S_n} t^2\,dt = \int_0^{S_n} t^2\,dt = \frac{1}{3} S_n^3$, d'où $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Mais $a_n^3 \sim \frac{1}{S_n}$ par hypothèse, d'où $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$

Exercice n° 3 :

* Si $u_0 < 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ et u_n est décroissante, donc $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}_-$. Si $\ell \neq -\infty$, on a $\ell = \ell - \ell^2$ en passant à la limite dans la formule ie $\ell = 0$ ↯.

  Donc $u_n \to -\infty$

* Si $u_0 > 1$, $u_1 = u_0(1-u_0) < 0$ et on se ramène au cas précédent

* Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ alors u_n est stationnaire en 0

* Si $u_0 \in]0;1[$, alors comme u_n est décroissante, on a que $u_n \to \ell \in [0;1[$ et $\ell = \ell - \ell^2$ ie $\ell = 0$ d'où $u_n \to 0$.

Équivalent de u_n :

* Cas $u_0 \in]0;1[$: On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ est sympa (généralement constant + $o(1)$). Ici, on prend $\alpha = -1$

$$u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = u_n^{-1}(1-u_n)^{-1} - u_n^{-1}$$
$$= u_n^{-1}\left(1 + u_n + o(u_n)\right) - u_n^{-1} \quad \text{car } u_n \to 0$$
$$= 1 + o(1)$$

Par sommation des relations $\sim$: $u_{n+1}^{-1} - u_0^{-1} \sim n+1 \sim u_{n+1}^{-1}$

et $u_{n+1} \sim \frac{1}{n+1}$