Sujet 3

Exercice n° 1 :

1) * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n}$. On $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge

* La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e;+\infty[$.

En effet, sa dérivée est $x \longmapsto \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$, et $\forall x \geq e$ $1 - \ln(x) \leq 0$.

On en déduit qu'à partir du rang $n=3$, u_n décroit, et ce vers 0 (comparaison $\ln(x)$ et $\frac{1}{2}$)

Par le CSSA, $\sum v_n$ converge.

2) * $\forall n \geq 3$, $\forall t \in [n;n+1]$: $\quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(t)}{t} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

d'où $\quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

On a donc : $\quad \sum_{n=3}^{N} u_{n+1} \leq \int_3^{N+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{n=3}^{N} u_n$

On en déduit l'encadrement :

$$S_{N+1} - u_3 - u_2 \leq \int_3^{N+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq S_N - u_2$$

i.e. $\quad u_2 + \int_3^{N+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq S_N \leq u_2 + u_3 + \int_3^{N} \frac{\ln(t)}{t} dt$

i.e. $\quad u_2 + \frac{1}{2}\ln(N+1)^2 - \frac{1}{2}\ln(3)^2 \leq S_N \leq u_2 + u_3 + \frac{1}{2}\ln(N)^2 - \frac{1}{2}\ln(3)^2$

Comme $\ln(N+1) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$, on a $S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(N)^2}{2}$

* Pour obtenir un développement un cran plus loin, on regarde $y_N = S_N - \frac{1}{2}\ln(N)^2$ et on cherche un équivalent de y_N

Pour ce faire, on regarde généralement :

$$y_{N+1} - y_N = u_{N+1} - \frac{1}{2}\ln(N+1)^2 + \frac{1}{2}\ln(N)^2 = \frac{\ln(N)}{N} + \frac{1}{2}\left[\ln(N)^2 - \left(\ln(N) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\right)^2\right]$$

$$= \frac{\ln(N)}{N} + \frac{1}{2}\left[\ln(N)^2 - \left(\ln(N) + \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^2\right]$$

$$= \frac{\ln(N)}{N} + \frac{1}{2}\left[-2\frac{\ln(N)}{N} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right) + \frac{1}{N^2}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2\right]$$

$$= O_{+\infty}\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right)$$

Par comparaison de Riemann (avec $\frac{1}{N^{3/2}}$ par exemple), $\sum y_{n+1} - y_n$ converge absolument : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{n=2}^{N-1} y_{n+1} - y_n \longrightarrow \alpha$

" $S_N - S_2 - \frac{1}{2}\ln(N)^2 + \frac{1}{2}\ln(2)^2$

Au final : $S_N = \frac{1}{2}\ln(N)^2 + \beta + O_{+\infty}(1)$ $\quad (\beta = \alpha + S_2 - \frac{1}{2}\ln(2)^2)$

Exercice n° 2 :

Supposons par l'absurde que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable. On peut donc dénombrer les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Par hypothèse, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $A = A_n$. Si $n \in A$, alors $n \notin A_n = A$ déf de A, absurde. De même, si $n \notin A$, alors $n \in A_n = A$, absurde !.

Exercice n° 1 (bis) :

3) Soit $T_N := \sum_{n=2}^{N} v_n$.

On a : $T_{2N+1} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p)}{2p} - \underbrace{\sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}}$

$$= S_{2N+1} - \sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p)}{2p}$$

$$= -S_{2N+1} + \sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p)}{p} = \ln(2) H_N + \underbrace{S_N - S_{2N+1}}$$

$$= -\ln(N)\ln\left(2+\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2+\frac{1}{N}\right)^2 + o(1)$$

$$= \ln(2)\left(\ln(N) + \gamma + o(1)\right) - \ln(N)\left(\ln(2) + \frac{1}{2}\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2+\frac{1}{N}\right)^2 + o(1)$$

$$= \ln(2)\gamma - \frac{\ln(N)}{2N} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2+\frac{1}{N}\right)^2 + o(1)$$

$$\longrightarrow_{N\to+\infty} \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}\ln(2)^2$$