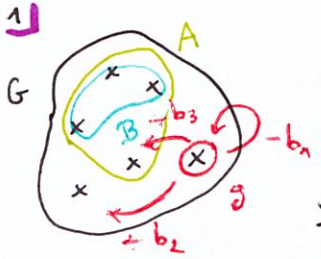
Sujet 3

Exercice 1 :

⚠ A et B ne sont pas forcément des ss-groupes de G !

1]



L'idée est de comprendre d'où vient la condition sur les cardinaux, pour cela essayez de faire un dessin, et dans plusieurs cas (pour ne pas tomber sur un cas trop particulier).

Soit $g \in G$. On veut trouver $a \in A, b \in B$ tq $g = a+b$ ie $g-b = a$. Si $A+B=G$, en parcourant les $b \in B$, on doit tomber sur $a \in A$, il suffit donc de le démontrer !

Déjà $g-b = g-b' \iff b=b'$ donc $\begin{matrix} B \to G \\ b \mapsto g-b \end{matrix}$ est injectif.

On a donc $\mathrm{Card}(B)$ éléments de la forme $g-B$. Or il y a $\mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(A)$ éléments qui ne sont pas dans A et $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$ i.e. $\mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(A)$

On a par cardinalité forcément un élément de $g-B$ qui est dans A

2] • $0 \in H$ car $\forall a \in A$, $a = 0+a$

• Si $x, y \in H$ $(x-y)+A = x+(-y+A) = x+A = A$

$y+A = A$ d'où $A = A-y$ (c'est la bijection réciproque de $\begin{matrix} A \to A \\ a \mapsto y+a \end{matrix}$)

donc $x-y \in H$.

⚠ Il faut faire attention avec ce genre de manipulations, qui sont plus subtiles qu'il n'y paraît. Ramenez-vous à des bijections si vous n'êtes pas sûr de vous.

3] • Si $\exists b \in G$ tq $B \subset b+H$, alors $A+B = \{a+b+h : a \in A, h \in H\}$

$= \{a+h+b : a \in A, h \in H\}$

$= \{a'+b : a' \in A\}$

car $\begin{matrix} A \to A \\ a \mapsto h+a \end{matrix}$ est une bijection. $= b+A$.

On a donc bien $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$

• Si $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$.

"Analyse" : On cherche $b \in G$ tq $B \subset b+H$.

Comme $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$ pour $x, x' \in B$, on a :

$A+B = A+x = A+x'$. En particulier, $\forall a \in A$, $\exists a' \in A$ tq $a+x = x'+a'$

ie $x-x'+a = a'$. On a donc $x-x' \in H$

"Synthèse" : Fixons $b \in B$.

Soit $b' \in B$:

$b' = \underbrace{b'-b}_{\in H} + b$ par "l'analyse".

Exercice 2 :

Utilisons la formule $\varepsilon(u) = \prod_{i<j} \frac{u(i)-u(j)}{i-j}$ = nombre d'inversions

Pour $i \in [\![0 ; \frac{p-1}{2}]\!]$, $u(i) = 2i$

Pour $i \in [\![\frac{p+1}{2} ; p-1]\!]$, $u(i) = 2i-p$ (car on regarde mod. p)

1er cas : $i \in [\![0 ; \frac{p-1}{2}]\!]$:

→ $j \in [\![0 ; \frac{p-1}{2}]\!]$: pas d'inversion

→ $j \in [\![\frac{p+1}{2} ; p-1]\!]$: $u(i) > u(j) \iff 2i > 2j-p \iff j < \frac{p}{2}+i$

On a donc comme $j > i$ exactement $(\frac{p}{2}+i-\frac{1}{2}) - (\frac{p+1}{2}) + 1 = i+\frac{1}{2}$ j possible afin d'avoir une inversion.

2nd cas : $i \in [\![\frac{p+1}{2} ; p-1]\!]$

→ $j \in [\![0 ; \frac{p-1}{2}]\!]$: On ne fait pas ce cas car on veut $i<j$

→ $j \in [\![\frac{p+1}{2} ; p-1]\!]$: pas d'inversion

Finalement, on a $\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} i = \frac{\frac{p-1}{2} \times \frac{p+1}{2}}{2} = \frac{p^2-1}{8}$ inversions,

d'où $\varepsilon(u) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Exercice 3 :

Si G est dénombrable, c'est fini.

Si G est indénombrable, soit $a \in \mathbb{R} \setminus G$. Alors $a+G \subset \mathbb{R} \setminus G$ (car sinon $a \in G$), et $a+G$ est indénombrable, CQFD.