Sujet 3

Exercice n° 1 :

1] L'application $M \longmapsto \chi_M$ est continue.

Si (M_p) est une suite de S, non stationnaire, qui converge vers I_m, alors $\chi_{M_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} (X-1)^m$. On quitte à extraire (et enlever le $M_p = I_m$), on a que $\chi_{M_p} = (X+1)^{m_p}(X-1)^{m-m_p}$, avec $m_p > 0$ (ie -1 vp).

En particulier $\chi_{M_p} = (X+1) \times P_p \longrightarrow (X-1)^m$, impossible car $X+1 \nmid (X-1)^m$.

Donc I_m est un point isolé

2] De même que pour 1], $-I_m$ est aussi un point isolé

Si maintenant $M \in S$, mais $M \neq \pm I_m$. On sait que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M, et en particulier, M est diagonalisable : $\exists P \in GL_m(\mathbb{R})$, $M = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$.

Comme $M \neq \pm I_m$, on sait que D contient au moins un -1.

Soit $\varepsilon > 0$ et $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ (i : ligne, j : colonne). On pose $M_\varepsilon = (P+\varepsilon E_{ij}) D (P+\varepsilon E_{ij})^{-1}$

(bien défini pour ε assez petit, par continuité du dét).

On a $M_\varepsilon \longrightarrow M$ et $M_\varepsilon \in S$. De plus, $M_\varepsilon \neq M$. $\exists i,j$!!

En effet, si $M_\varepsilon = M$, $\forall i,j$, on a :

$$(P+\varepsilon E_{ij}) D (P+\varepsilon E_{ij})^{-1} = PDP^{-1}$$

i.e. $P^{-1}(P+\varepsilon E_{ij}) D = D P^{-1}(P+\varepsilon E_{ij})$

i.e. $P^{-1} E_{ij} D = D P^{-1} E_{ij}$,

En utilisant le fait que le dernier coef de D est un -1, on montre par exemple que la dernière ligne de P^{-1} est nulle (juste par calculs), ce qui est absurde.

Donc M n'est pas isolé

3] $M \xmapsto{\varphi} M^2$ est continue donc $S = \varphi^{-1}(\{I_m\})$ est fermé, mais ce n'est pas un compact : il n'est pas borné.

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(En dim 2, pour la dim m, prendre $\begin{pmatrix} M_p & 0 \\ 0 & I_{m-2} \end{pmatrix}$).

Exercice n° 2 :

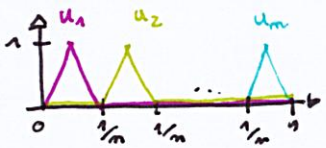
1] $$\sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|^2 = \sum_\sigma \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma(i)\sigma(j) \langle u_i, u_j \rangle \quad \text{par bilinéarité}$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Big(\sum_\sigma \sigma(i)\sigma(j) \Big) \langle u_i, u_j \rangle$$

Si $i=j$, $= \sum_\sigma 1 = 2^m$

Si $i \neq j$ $= 0$ car il y a autant de σ qui envoie i et j sur des signes opposés (donc $\sigma(i)\sigma(j)$ que de σ qui envoie sur même signe $=-1$) (donc $\sigma(i)\sigma(j)=1$)

D'où $$\sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 \times 2^m.$$

2] On va regarder les u_i, $i \in [\![1;m]\!]$ définis comme sur le dessin.



Supposons que $\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq \beta \|\cdot\|$.

On calcule $\sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|_\infty^2 = 2^m$

$= 1$ car les u_i sont à supports disjoints i.e. ne sont pas non nuls en même temps.

Par 1, on a alors :

$$m 2^m = 2^m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_\infty^2 \leq 2^m \beta^2 \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 = \beta^2 \sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|^2 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|_\infty^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} 2^m$$

$$\Rightarrow \quad m 2^m \leq 2^m \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{↯}$$

3] On utilise les mêmes u_i : supposons que $\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_p \leq \beta \|\cdot\|$

On a $$\sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|_p^2 = 2^m \Big(m \int_0^{1/m} |u_1|^p \Big)^{2/p} = 2^m m^{2/p} \Big(2 \int_0^{1/2m} (mx)^p \Big)^{2/p}$$
$$= 2^m m^{2/p} 2^{2/p} (2m)^2 \Big(\frac{1}{2m}\Big)^{\frac{2(p+1)}{p}} \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{2/p} = C 2^m$$

On a alors :

$$2^m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_p^2 \geq 2^m \alpha^2 \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 = \alpha^2 \beta^2 \sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|^2 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sum_\sigma \Big\| \sum_{i=1}^m \sigma(i) u_i \Big\|_p^2 \leq C 2^m$$

$$C_1 2^m m \times \Big[m^2 \Big(\frac{1}{2m}\Big)^{2+\frac{2}{p}} \Big] = C_1' 2^m m^{1-\frac{2}{p}} \leq L_0 \text{ ↯ si } p>2 \text{ ↯ si } p<2$$