Sujet 2

Exercice n° 1 :

$$\cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right) \quad \left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

$$= \cos\left(n^2\pi\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\times(-1)^n$$

$$= -(-1)^n\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par le CSSA et le critère de Riemann, on sait que :

$$\sum \frac{(-1)^n}{3} \text{ cv et } \sum O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ cv.}$$

Donc $\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$ cv

Exercice n° 2 :

La famille $\left(\frac{1}{k!}\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\geq n}}$ est à termes positifs, on peut donc faire de la sommation par paquets dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e.$$

Exercice n° 3 :

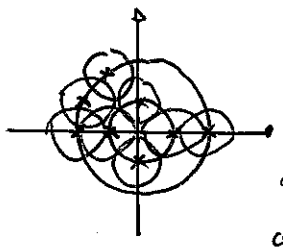
+ Existence : si $u_n = \frac{n+1}{3^n}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$. Par critère de D'Alembert, la série converge.

* Somme : On va écrire la somme de façon à reconnaître un produit de Cauchy :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\times\frac{1}{3^{n-k}}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}$$

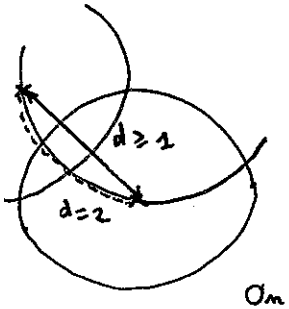
Exercice n° 4 :

L'idée est de considérer des points sur les cercles de rayons $k\in\mathbb{N}$



On veut alors disposer le plus de points sur le cercle, de façons à ce qu'ils soient tous à distance au moins 1

Pour garder de la marge, on peut considérer les points qui sont espacés de 2 en suivant le cercle :



Sur un cercle de rayon k, on peut au moins placer $\left\lfloor\frac{2\pi k}{2}\right\rfloor = \lfloor\pi k\rfloor$ points comme ceci

Pour (vraiment l'être sur), on peut se dire qu'on place k points.

On a alors si on note $z_{k,i}$, $i\in[\![1;k]\!]$ ces points :

$$\sum_{k,i}\frac{1}{|z_{k,i}|^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$