Sujet 2

## Exercice n° 1 :

**1)** Procédons par récurrence :

* $p=0$. Comme $x \in ]-1;1[$, la série $\sum x^k$ converge absolument.

De plus, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} x^k = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

* Supposons que la série converge absolument pour $p \in \mathbb{N}$, $x \in ]-1,1[$.

Alors $\underbrace{\sum v_k}$ $\qquad$ $\underbrace{\sum u_k}$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \frac{1}{(1-x)^p} \times \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{k=p-1}^{+\infty} \binom{k}{p-1} x^{k-p+1}\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)$$

Par théorème de produit de Cauchy, en posant $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}$, on a que $\sum w_k$ est abs cv.

On a ainsi

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Cependant, $w_n = \sum_{k=0}^{n-p+1} u_k \cdot v_{n-k}$ (convention $v_k = 0$ si $k \le p-2$)

$$= \sum_{k=0}^{n-p+1} x^k \binom{n-k}{p-1} x^{n-k-p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-p+1} x^{n-p+1} \binom{n-k}{p-1}$$

$$= x^{n-p+1} \underbrace{\sum_{k=p-1}^{n} \binom{k}{p-1}}$$

$$\sum_{k=p-1}^{n} \left(\binom{k+1}{p} - \binom{k}{p}\right) = \binom{n+1}{p} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0}$$

$$= x^{n-p+1} \binom{n+1}{p}$$

On a ainsi :

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \quad \text{(après changement d'indice } n \to n+1)$$

Rmq : Il y a une preuve beaucoup plus courte une fois les séries entières vues.

**2)** On a à faire à une famille de termes quelconques. Soit $(a_{n,k})_{n,k}$ où $a_{n,k} = \binom{k}{n}(\lambda-1)^{k-n}\lambda^k u_k \mathbb{1}_{k\ge n}$.

$$\sum_{n,k} |a_{n,k}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \left|\binom{k}{n}(\lambda-1)^{k-n}\lambda^k u_k\right|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |1-\lambda|^{k-n}\right) \lambda^k |u_k| \quad (\text{on a } |\lambda-1| = 1-\lambda)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1+1-\lambda)^k \lambda^k |u_k| < +\infty \quad \text{car } (2-\lambda)\lambda \le 1 \text{ et } (u_k) \text{ sommable.}$$

On en déduit que les $(a_{n,k})$ sont sommables. On peut appliquer la sommation par paquet :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}(\lambda-1)^{k-n}\right) \lambda^k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{2k} u_k$$

## Exercice n° 2 :

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $I$ est dénombrable. (QPS $I=\mathbb{N}$)

On a $\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_i]$.

Mais $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_i] \simeq \mathbb{Q}^i$ est dénombrable, donc comme union dénombrable d'ensembles dénombrables, $\mathbb{R}$ est dénombrable $\lightning$.

## Exercice n° 3 :

Par le CSSA, on sait que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} := u_n$ est bien défini.

Soit $N \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n}^{N} -\int_0^1 (-t)^{k-1}\,dt = -\int_0^1 \sum_{k=n}^{N} (-t)^{k-1}\,dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{(-t)^{n-1} - (-t)^N}{1+t}\,dt$$

d'où quand $N \to +\infty$ :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \frac{(-t)^{n-1}}{1+t}\,dt \quad \text{car } \left|\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt\right| \le \frac{1}{2}\int_0^1 t^N\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = -\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^{n-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{-1}{1+t} \sum_{n=0}^{N} (-t)^{n-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{1+t} \cdot \frac{1-(-t)^N}{1+t}\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$$

La série $\sum u_n$ cv, et sa somme vaut $-\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{1}{2}$.