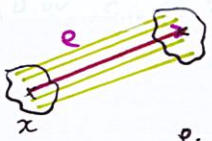
Sujet 2

Exercice n° 1 :

* Soient $x, y \in \bar{C}$ et $t \in [0;1]$. Comme $x, y \in \bar{C}$, $\exists (x_n), (y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

On a alors : $tx + (1-t)y = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{tx_n + (1-t)y_n}_{\in C} \in \bar{C}$

*



Soient $x, y \in \mathring{C}$, $t \in [0;1]$. On sait qu'il existe $r_x, r_y > 0$ t.q. $B(x, r_x) \subset \mathring{C}$, $B(y, r_y) \subset \mathring{C}$.

On pose $r = \min\{r_x, r_y\}$, et $e = y - x$.

Si $z = tx + (1-t)y = y - te$, on a alors :

$\forall w \in B(z, r)$, $w = w - z + z = \underbrace{w - z + y}_{\in B(y,r)} - te$

i.e. w est une combinaison convexe de $w - z + y$ et de $w - z + y - e = w - z + x$.

$\Rightarrow w \in C$, $\forall w \in B(z, r)$, et donc $z \in \mathring{C}$.

Exercice n° 2 :

Soit $x, y \in E$, $a \in A$:

$$d(x, A) \leq d(x, a) = \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$
$$\leq d(x, y) + d(y, a).$$

En passant à l'inf sur $a \in A$, on a : $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$,

d'où $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

Comme $\|x - y\| = \|y - x\|$, en inversant les rôles de x et y, on obtient la seconde partie de l'inégalité

Exercice n° 3 :

Soit $f \in E$. Par le théorème de Weierstrass, comme $f' \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $\exists (P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|f' - P_n\|_{\infty, [a,b]} \to 0$

On voudrait alors prendre Q_n une primitive de P_n, pour que la partie $\|f - Q_n\|_\infty$ converge.

Une primitive de P_n est donnée par $c_n + \int_a^x P_n(t)\,dt$, avec $c_n \in \mathbb{R}$.

On veut que $\|f - Q_n\|_\infty \to 0$, on :

$$\forall x \in [a;b], \quad |f(x) - Q_n(x)| = \left| f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt - c_n - \int_a^x P_n(t)\,dt \right|$$
$$\leq |f(a) - c_n| + \int_a^x |f'(t) - P_n(t)|\,dt$$
$$\leq |f(a) - c_n| + \underbrace{(x-a)}_{\leq b-a} \underbrace{\|f' - P_n\|_\infty}_{\to 0 \text{ } (n \to +\infty)}$$

Il suffit donc de prendre $c_n = f(a)$.

En passant au max :

$$\|f - Q_n\|_\infty \leq (b-a)\|f' - P_n\|_\infty,$$

et $\|f - Q_n\| \leq (b-a+1)\|f' - P_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Remarque : $\mathcal{C}^1$ est encore vrai si on prend $\mathcal{C}^n([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_\infty$.

Exercice n° 4 :

On va montrer que l'adhérence est l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. (notons les $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

* Clairement $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, d'où $\overline{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{C}_0(\mathbb{R})} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$
($\mathcal{C}$ support compact ; fermé car la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ entraîne celle de la convergence ponctuelle.)

* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists R > 0 \quad \forall |x| > R, \quad |f(x)| < \varepsilon$.

Soit alors φ comme sur le dessin :

$\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ et $\varphi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

