Sujet 1

Exercice n° 1 :

⚠ On ne peut pas directement appliquer le CSSA, car $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante

On a pour $n \geq 2$:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par le CSSA et critère de Riemann :

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ cv, $\sum \frac{1}{n}$ dv et $\sum \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ cv.

On en déduit que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ dv.

Exercice n° 2 :

Q1 Pour $k \geq 3$, $\ln(k)^2 \geq 1$ donc $u_n \geq 1$. $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Q2 Pour $x \geq 1$, $x \mapsto \ln(x)^2$ est croissante, on peut donc faire une comparaison série intégrale.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [n; n+1],\ \ln(n)^2 \leq \ln(t)^2 \leq \ln(n+1)^2$$

d'où $\ln(n)^2 \leq \int_n^{n+1} \ln(t)^2 dt \leq \ln(n+1)^2$

i.e $\int_{n-1}^{n} \ln(t)^2 dt \leq \ln(n)^2 \leq \int_n^{n+1} \ln(t)^2 dt$

et $\int_1^n \ln(t)^2 dt \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k)^2 \leq \int_2^{n+1} \ln(t)^2 dt$

On, $\int_1^n \ln(t)^2 dt \overset{IPP}{=} \left[(x\ln(x)-x)\ln(x)\right]_1^n - \int_1^n (t\ln(t)-t)\frac{1}{t} dt$

$= n\ln(n)^2 - n\ln(n) - \int_1^n \ln(t) dt + \int_1^n 1 dt$

$= n\ln(n)^2 - n\ln(n) - (n\ln(n) - n + 1) + n - 1$

On a donc $\int_1^n \ln(t)^2 dt \sim n\ln(n)^2$, et $u_n \sim n\ln(n)^2$

Q3 $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{n\ln(n)^2}$, c'est une série de Bertrand avec $(\alpha,\beta) = (1,2)$

donc $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

Exercice n° 3 :

On sait que $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où $u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \overset{DSE}{=} 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)$

On a donc pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{u_n} = 6\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 6\left(H_N + H_{N+1} - 1 - 4\left(H_{2N+1} - \frac{1}{2}H_N - 1\right)\right)$$

$$= 6\left(\ln(N) + \gamma + \ln(N+1) + \gamma + 5 - 4\left(\ln(2N+1) + \gamma - \frac{1}{2}\ln(N) - \frac{\pi}{2}\right)\right) + o(1)$$

$$\overset{DL}{=} 6\ln(N)\left(1 + 1 + \frac{1}{N\ln(N)} + \frac{5}{\ln(N)} + 2 - 4\left(\frac{\ln(2)}{\ln(N)} + 1 + \frac{1}{2N}\right)\right) + o(1)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 6\times(5 - 4\ln(2))$$