Sujet 1

Exercice n°1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = \pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \pi n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \right.$

$\left.\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \pi n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(-1)^n$

$= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Par le critère de Riemann, $\sum (-1)^{n+1} \times O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est cv.

Par le CSSA, comme $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante et cv vers 0, on a que $\sum (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}$ cv.

Ainsi $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est convergente.

3) D'après ce qui précède, $\left|\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}$, qui n'est pas sommable.

Ainsi, la série n'est pas abs cv.

Exercice n°2 :

On travaille avec des familles à terme positifs, on peut donc utiliser la sommation par paquet.

$$\star \sum_{p,q\geq 1}\frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_k}\frac{1}{(p+q)^\alpha} \quad \text{où } I_k = \{(p,q) : p+q=k\}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \times \mathrm{Card}(I_k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^\alpha} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

Par critère de Riemann, $\left(\frac{1}{p+q}\right)$ est sommable ssi $\alpha > 2$

$\star$ On remarque que $\forall p,q \geq 1$, $2pq \leq p^2+q^2 \leq (p+q)^2$.

On a donc dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 1}\frac{1}{(pq)^\alpha} \geq \sum_{p,q\geq 1}\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \geq \sum_{p,q\geq 1}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \quad \begin{matrix}\text{si } \alpha \geq 0 \\ \text{si } \alpha < 0\end{matrix}$$

D'après ce qui précède, le terme à droite est convergent / sommable ssi $2\alpha > 2$, et le terme à gauche est sommable ssi $\alpha > 1$ $\left(\text{car} = \left(\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^\alpha}\right)\right)$

On en déduit que pour
- $\alpha > 1$, $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)$ est sommable
- $\alpha \leq 1$, $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)$ n'est pas sommable.

Exercice n°3 :

1) On a par une récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u^n\| \leq \|u\|^n$

Comme $\|u\| < 1$, on en déduit que la série $\sum u^n$ converge absolument, et donc est convergente.

De plus,

$$(1_A - u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \sum_{n=0}^{+\infty} u^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - u^0$$

$$= 1_A$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right)(1_A - u)$$

On a donc bien $1_A - u \in A^\times$

2) Pour $u \in A$ $\left\|\frac{u^n}{n!}\right\| \leq \frac{1}{n!}\|u\|^n$, donc $\sum \frac{u^n}{n!}$ est abs cv, donc est convergente.

De plus, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}\right\| = \left\|\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{u^n}{n!}\right\| = \lim_{N\to+\infty}\left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{u^n}{n!}\right\|$

$\leq \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\|u\|^n}{n!}$ ↑ continuité de la norme.

$= \exp(\|u\|)$