Exercice 1 :

1) Supposons A commutatif. Soient $x, y \in A$, nilpotents, d'indices n et m.

- $(xy)^{nm} = (x^n)^m (y^m)^n = 0$ car $x^n = 0$ (ici seul la nilpotence de l'un des deux suffit)
- $(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} = 0$.
  car $= 0$ si $k \geq m$; $= 0$ si $n+m-k \geq m$ i.e. $n \geq k$

Contre-exemple : $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotents, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

De même $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotent.

2) Soit $a \in \mathrm{Nil}(A)$, et n son indice de nilpotence.

On a :

$$(1-a) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=1}^{n} a^k$$

$$= 1 - a^n = 1$$

Exercice 2 :

1) Posons $m = \bigvee_{x \in G} o(x)$. Alors $\forall x \in G$, $x^m = e$ car $o(x) \mid m$ et $x^{o(x)} = e$.

Maintenant, si $n \leq m$ et $\forall x \in G$, $x^n = e$, on a $o(x) \mid n$, d'où $m \mid n$ (car m est le ppcm).

On en déduit que m est bien le plus petit entier tq $\forall x \in G$, $x^m = e$.

2) Ecrivons $\exp(G) = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ avec $p_1, \dots, p_n$ des premiers distincts.

$\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\exists x_i \in G$ tq $p_i^{\alpha_i} \mid o(x)$.

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait

$$\forall x \in G, \quad x^{p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_i^{\alpha_i - 1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}} = e$$

ce qui contredit la minimalité de $\exp(G)$.

Si $o(x_i) = m_i p_i^{\alpha_i}$ quitte à prendre $x_i^{m_i}$, on peut supposer $o(x_i) = p_i^{\alpha_i}$

Posons $y = x_1 \times \dots \times x_n$. Comme les p_i sont 2 à 2 premiers entre eux, on a $o(y) = o(x_1) \times \dots \times o(x_n) = \exp(G)$.

Exercice 3 :

Soit $n = |G|$, $m = \exp(G)$.

$\forall x \in G$, $x^m = 1$, donc le polynôme $X^m - 1$ a au moins n racines, d'où $m \geq n$.

Mais $m \leq n$ (car $\forall x \in G$, $x^n = 1$), d'où $m = n$. Par l'exercice n°2, on dispose de $y \in G$ t.q. $o(y) = m = n$, i.e. $G = \langle y \rangle$ et G est cyclique, de générateur y.