Exercice n°1 :

Les trois premiers exemples se traitent facilement par continuité : si f est continue et F fermé (O ouvert) alors $f^{-1}(F)$ est fermé ($f^{-1}(O)$ ouvert).

Comme pas encore vu en cours (à ma connaissance), on va le faire "à la main".

1] Soit $(x_m, y_m) \in A \to (x,y)$. $\forall m$, $x_m y_m = 1 = (x_m - x)y_m + y_m x - y_m y + y y_m - xy + xy$

d'où $1 = \underbrace{(x_m - x)}_{\to 0}\underbrace{y_m}_{\text{borné}} + \underbrace{y_m}_{\to y}(x-y) + y\underbrace{(y_m - x)}_{\to y-x} + xy = 0 + y(x-y) + y(y-x) + xy = xy$.

et donc $(x,y) \in A$, et A est fermé, pas ouvert (faire un dessin), et pas borné ($\frac{1}{m}, m$).

2] B est ouvert : si $(x,y) \in B$, $\varepsilon > 0$, alors $\forall x', y'$ tq $|x-x'|, |y-y'| < \varepsilon$, on a :

$$x'^2 + x'y' + y'^2 = \underbrace{x'^2 - x^2}_{< \varepsilon(2\|x\| + \varepsilon)} + \underbrace{x'y' - xy}_{< C\varepsilon (2\|y\| + \varepsilon)} + \underbrace{y'^2 - y^2}_{< C\varepsilon} + \underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{< 1}$$

$< C\varepsilon$ (faire comme 1)

Pour ε assez petit, $x'^2 + x'y' + y'^2 < 1$

Donc B est ouvert. B n'est pas fermé (par exemple prendre $y = 0$ et faire tendre x vers 1).

On a $\forall (x,y) \in B$, $x^2 + xy + y^2 < 1$. Si x et y sont de même signe, ils sont clairement dans $[-1;1]$. Sinon, on a $x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - \underbrace{xy}_{\text{positif}} < 1$

donc $|x+y| < 1$ et $|xy| < 1$ et sont donc bornés.

3] C'est fermé : si $(z_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors par continuité de Re,

$\mathrm{Re}(z_m^2) \to \mathrm{Re}(z^2)$ ($z_m \to z$), d'où $\mathrm{Re}(z^2) \le 1$.

C'est pas borné : $\mathrm{Re}(z^2) = u^2 - v^2$ si $z = u + iv$, il suffit de prendre

$v = \sqrt{u^2 + 1}$

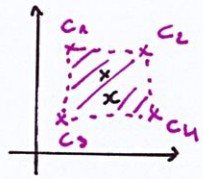
4] D n'est pas ouvert, car $\frac{\sqrt{2}}{3^m} \notin \mathbb{Q}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{3^m}, 0\right) \to (0,0) \in D$.

D n'est pas fermé car $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ d'où $\overline{D} = \mathbb{R}^2 \neq D$.

D n'est pas borné.

Exercice n°2 :

Idée : Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$:



L'idée est d'encadrer un $x \in \mathbb{R}^2$ par quatres points de C (voir dessin)

On aura alors $x \in$ Carré (C_1, C_2, C_3, C_4)

$\|$

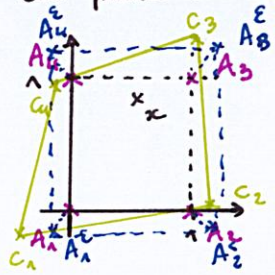
$\mathrm{Conv}(C_1, C_2, C_3, C_4)$

Sans perte de généralités, on peut se placer dans $\mathbb{R}^n$, et même dans $[0;1]^n$.

Soit $x \in [0;1]^n$, et soit $\varepsilon > 0$. On pose $e_{1,\dots}$ en la base canonique.

L'idée est de considérer les points A_i, $i \in [\![1; 2^n]\!]$, dont les coordonnés sont des 0 et 1 (ce sont les sommets du cube en dim n), et d'approcher à $\frac{\varepsilon}{2}$ près les points A_i^ε, dont les coordonnées sont celles de A_i, plus ε pour les 1 et $-\varepsilon$ pour les 0 (Ex : $A_i = (1,0)$, $A_i^\varepsilon = (1+\varepsilon, -\varepsilon)$).

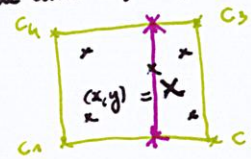
On prend alors par densité un c_i proche de A_i^ε à ε près.



(pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

On a alors que $\mathrm{Conv}(c_1, \dots, c_{2^n}) \supset [0;1]^n$

L'idée est de faire une récurrence sur la dim, et de se baser sur l'algo suivant (de dim 2, à généraliser)



étape 1, tracer les lignes entre les c_i, $\in \mathrm{Conv}(c_1, \dots c_4)$

étape 2, se placer avec 2 points de $[C_4C_3]$ et $[C_1C_2]$ dont la 1ère coordonnée est x, puis tracer la ligne : $y \in$ ligne $\subset \mathrm{Conv}(c_1, \dots, c_4)$

Le travail qui a été fait sur le cube $[0;1]^n$ peut être fait sur tous les cubes de $\mathbb{R}^n$, d'où le résultat.

Exercice n°3 :

1) On remarque que $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_1$.

* IT : OK
* Homogénéité : OK
* Si $N_a(P) = 0$ alors $P(a) = 0$ et $P' = 0$ d'où $P = cte = P(a) = 0$.

2) Soient $a, b \in [0;1]$. OPS $b > a$

$$\begin{aligned} N_a(P) &= |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt \\ &= |P(b) + \int_b^a P'(t)\,dt| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt \\ &\leq |P(b)| + \int_a^b |P'(t)|\,dt + \int_0^1 |P'(t)|\,dt \\ &\leq 2|P(b)| + 2\int_0^1 |P'(t)|\,dt \quad \begin{matrix}(\text{car } |P'(t)| \geq 0,\ |P(b)| \geq 0 \\ \text{et car } 0 \leq a < b \leq 1)\end{matrix} \\ &= 2N_b(P). \end{aligned}$$

Le même travail en échangeant a et b (attention aux bornes de l'intégrale), donne le résultat.

3) * Pour $a \in [0;1]$, par équivalence, on peut regarder juste le cas $a = 0$.

$$N_0\left(\frac{X^n}{2^n}\right) = 0 + \int_0^1 n\frac{x^{n-1}}{2^n}\,dx = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\left(\frac{X}{2}\right)^n \to 0$

* Pour $1 < a < 2$ ou $-2 < a < 0$

$$N_a\left(\left(\frac{X}{2}\right)^n\right) = \frac{a^n}{2^n} + \int_0^1 n\frac{x^{n-1}}{2^n}\,dx = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{car } \left|\frac{a}{2}\right| < 1$$

* Pour $|a| > 2$

$$N_a\left(\frac{X^n}{2^n}\right) = \underbrace{\left|\frac{a}{2}\right|^n}_{\text{diverge}} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{converge}}$$

donc $\left(\frac{X}{2}\right)^n$ diverge.

* Pour $a = -2$, si $Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$N_a\left(\frac{X^n}{2^n} - Q\right) = \underbrace{|(-1)^n - Q(a)|}_{\text{ne peut pas converger vers 0}} + \int_0^1 \left|n\frac{x^{n-1}}{2^n} - Q'(x)\right|dx$$

donc $\frac{X^n}{2^n}$ diverge.

* Pour $a = 2$:

$$N_a\left(\frac{X^n}{2^n} - Q\right) = |1 - Q(a)| + \int_0^1 \left|n\frac{x^{n-1}}{2^n} - Q'(x)\right|dx$$

On veut donc $Q(a) = 1$. On sait que $\int_0^1 \left|n\frac{x^{n-1}}{2^n}\right|dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

on veut donc aussi que $Q' = 0 \Rightarrow Q = 1$.

$$N_a\left(\frac{X^n}{2^n} - 1\right) = |1 - 1| + \int_0^1 n\frac{x^{n-1}}{2^n}\,dx = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $\frac{X^n}{2^n} \to 1$.