♯ Leçons

Antoine Diez

École Normale Supérieure de Rennes - Université de Rennes 1

2016 - 2017

Cher lecteur,

J'ai rassemblé dans ce document l'ensemble des plans que j'ai préparés (et rédigés à la main) pour l'agrégation externe de Mathématiques en 2016-2017 à l'ENS Rennes et à l'Université de Rennes 1. Lorsque cela m'a semblé pertinent, j'ai adjoint quelques commentaires souvent d'ordre bibliographique et qui retranscrivent mon sentiment sur certaines leçons. Un certain nombre de leçons manquent : soit parce que ce sont des impasses, soit parce que je n'ai jamais pris le temps de rédiger un plan ou bien parce qu'elles font doublon avec d'autres leçons. La qualité des plans proposés est très hétérogène. Si certains sont entièrement rédigés et quasiment présentables en l'état, un certain nombre sont incomplets ou sont encore (et resteront indéfiniment) au stade d'esquisse. Toutefois, il me semble que les plans des leçons d'analyse et de probabilités sont globalement de meilleure facture que les plans d'algèbre qui sont plus éloignés de mes goûts (dans la vie et du peu que je connais, j'aime l'analyse de Fourier, les EDP et les probabilités).

Beaucoup de plans et d'idées n'auraient jamais vu le jour sans les personnes avec lesquelles j'ai travaillé durant cette année et que je remercie ici : Grégoire Clarté, Gabriel Lepetit, David Michel, Alexandre Eimer entre autres et par pdf interposés les agrégatifs des années précédentes, Adrien Laurent et Florian Lemonnier en tête.

Ce document fait partie d'un triptyque : un autre document contient les développements que j'ai préparés et un troisième quelques commentaires et conseils bibliographiques.

Table des matières

101 **Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.** **6**

102 **Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.** **10**

103 **Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.** **14**

104 **Groupes finis. Exemples et applications.** **18**

106 **Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.** **22**

107 **Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.** **25**

110 **Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.** **29**

121 **Nombres premiers. Applications.** **33**

122 **Anneaux principaux. Applications.** **37**

123 **Corps finis. Applications.** **41**

125 **Extensions de corps. Exemples et applications.** **45**

142 **Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.** **49**

150 **Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.** **53**

151 **Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.** **57**

152 **Déterminant. Exemples et applications.** **61**

153 **Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.** **65**

154 **Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.** **69**

155 **Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.** **74**

156 **Exponentielle de matrices. Applications.** **77**

157 **Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.** **78**

158 **Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.** **82**

159 **Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.** **86**

161 **Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.** **90**

162 **Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.** **94**

170 **Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.** **99**

181 **Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.** **104**

182 **Applications des nombres complexes à la géométrie.** **108**

Table des matières

183 Utilisation des groupes en géométrie. 112

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications. 116

202 Exemples de parties denses et applications. 120

203 Utilisation de la notion de compacité. 124

204 Connexité. Exemples et applications. 128

205 Espaces complets. Exemples et applications. 132

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications. 136

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaire continues. Exemples. 140

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications. 144

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie. 148

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications. 152

218 Applications des formules de Taylor. 156

219 Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications. 163

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2. 167

221 Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications. 172

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires. 176

226 **Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_u)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.** **182**

228 **Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.** **185**

229 **Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.** **189**

233 **Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.** **193**

234 **Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.** **197**

235 **Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.** **201**

236 **Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.** **205**

239 **Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.** **209**

241 **Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.** **213**

243 **Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.** **217**

245 **Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.** **221**

246 **Séries de Fourier. Exemples et applications.** **225**

250 **Transformation de Fourier. Applications.** **228**

253 **Utilisation de la notion de convexité en analyse.** **232**

260 **Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.** **236**

261 **Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.** **240**

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. 244

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications. 249

264 Variables aléatoire discrètes. Exemples et applications. 253

Leçon 101

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

C'est le plan que j'ai réalisé pour un oral blanc. Il manque clairement une vraie partie géométrie, par exemple tout ce qu'on peut dire sur $\mathbf{P}GL_2(\mathbf{C})$ et le birapport et que l'on retrouve dans les leçons 182 et 183.

Bibliographie.

A. Jeanneret, D. Lines, *Invitation à l'Algèbre* pour les deux premières parties.
H2G2 pour la dernière partie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I. ACTIONS DE GROUPES.

1- Définitions

Déf 1 : Soient X un ensemble et G un groupe. Une action de G sur X est une application $\Phi : G \times X \to X$ telle que, en notant $g.x \equiv \Phi(g,x)$, on a :

(i) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ pour tout $x \in X$ et tous $g_1, g_2 \in G$.

(ii) $e.x = x$ pour tout $x \in X$.

Not: On note $G \curvearrowright X$ pour " G agit sur X "

Prop 2 : Soit $\Phi : G \times X \to X$ une action de G sur X.

Pour tout $g \in G$, l'application $\pi_g : X \to X$, $x \mapsto g.x$ est une bijection d'inverse $\pi_{g^{-1}}$.

Réciproquement, un homomorphisme $\varphi : G \to Bij(X)$ définit une action de G sur X donnée par $g.x = \varphi(g)(x)$.

Ex 3 : (i) $X = \{1, .., n\}$, $G = \mathfrak{S}_n$. On définit $\Phi : \mathfrak{S}_n \times X \to X$ par $\sigma . x = \sigma(x)$. L'homomorphisme φ associé est l'identité.

(ii) Le groupe $\mathbb{S}^1$ agit sur $\mathbb{C}$ par $e^{i\theta} . z = e^{i\theta} z$.

(iii) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ par $n . x = x + n$ ou $n . x = (-1)^n x$.

(iv) Un groupe agit sur lui-même par multiplication à gauche, par conjugaison.

App 4 : Soit G le groupe des quaternions de norme 1

On a un isomorphisme $\frac{G}{\{\pm 1\}} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

[Etude de l'action de G sur $\mathbb{H}$ par conjugaison].

[DÉVELOPPEMENT]

2. Orbites, stabilisateurs.

Défs (i) Soit $G \curvearrowright X$ et $x \in X$. On appelle orbite de x le sous-ensemble $Orb(x) = \{g.x, g \in G\} \subset X$

(ii) Une action est dite transitive lorsqu'elle n'a qu'une seule orbite i.e. $Orb(x) = X$ pour tout $x \in X$.

(iii) On appelle stabilisateur de x le sous-groupe : $Stab(x) = \{g \in G, g.x = x\}$.

Ex 6 : En reprenant les exemples 3 :

(ii) Si $z \neq 0$, $Orb(z)$ est le cercle centré en l'origine et passant par z. $Stab(z)$ est trivial.

(iv) Pour l'action par conjugaison, on appelle classes de conjugaison les orbites et centralisateur le stabilisateur d'un élément.

Prop 7 : Si $G \curvearrowright X$, les orbites de l'action sont les classes d'équivalence pour la relation $x \sim y$ ssi $\exists g \in G$, $g.x = y$.

De plus $\frac{G}{Stab(x)} \to Orb(x)$, $[g] \mapsto g.x$ est bien définie bijective.

Corollaire 8 : $Card(Orb(x)) = [G : Stab(x)]$.

Déf 9 : Soit $G \curvearrowright X$. Soit $g \in G$, on note $X^g = \{x \in X, g.x = x\}$

Thm 10 (Burnside) Soit G un groupe fini agissant sur X un ensemble fini. On note N le nombre d'orbites de l'action.

Alors $N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

App 11 Il y a $\frac{1}{12}(11k^2 + k^4)$ façons de colorier les faces d'un tétraèdre régulier avec k couleurs.

II. APPLICATIONS EN THÉORIE DES GROUPES.

1- p-groupes

Thm 12 (Formule des classes) Soient G un groupe fini et C un ensemble de représentants de chaque classe de conjugaison de G.
Alors $|G| = \sum_{x \in C} [G : C_G(x)]$ où $C_G(x)$ désigne le centralisateur de x dans G.

App. 13 (thm de Cauchy). Soit G un groupe fini et p premier tel que $p \mid |G|$. Alors G possède un élément d'ordre p
[action de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ sur $X = \{(x_1, \dots, x_p) \in G \times \dots \times G \ , \ x_1 \dots x_p = e\}$].

App. 14 Soit G un p-groupe (tel que $|G| = p^m$ où p premier). Alors le centre de G est non trivial
[action de G sur lui même par conjugaison].

App. 15 : Si G est un p-groupe d'ordre p^m, il existe une suite de sous-groupes emboîtés $\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_m = G$ tels que $|H_i| = p^i$, $H_i \lhd H_{i+1}$ et $\frac{H_{i+1}}{H_i} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

Thm. 16 (Sylow) Soient G un groupe fini et p premier tel que $|G| = p^m k$ où m est un entier ≥ 1 et $k \wedge p = 1$. Alors :
(i) Le groupe G contient au moins un sous-groupe d'ordre p^m
(ii) Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G d'ordre p^m H_1 et H_2 sont conjugués l'un de l'autre.
(iii) Le nombre N_p de sous-groupes de G d'ordre p^m vérifie $N_p \equiv 1 \ [p]$ et $N_p \mid k$
(iv) Tout p-sous-groupe de G est contenu dans au moins un sous-groupe d'ordre p^m [ADMIS].

App. 17 : Classification des groupes d'ordre 12.

2. Représentations linéaires de groupes finis.

Déf 18 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe fini. Une représentation de G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ qui correspond à une action de $G \curvearrowright V$ par $g.v = \rho(g)(v)$.

III. EN GÉOMÉTRIE

Déf 19 : Un espace affine $\mathcal{E}$ est la donnée de l'action d'un espace vectoriel $\vec{E}$ (considéré comme groupe additif) sur un ensemble $\mathcal{E}$.

Not. 20 : $\mathcal{E} \times \vec{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(M, \vec{v}) \longmapsto M + \vec{v}$.

III. APPLICATIONS EN ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE.

1- Action par translation.

Déf 21 : L'action par translation de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est définie par $P.A = PA$.

Déf 22 : On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes lorsqu'elle vérifie :
- si une ligne est nulle toutes les lignes suivantes sont nulles
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

Elle est réduite lorsque les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Ex. 23 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.

Thm 24 (i) Deux matrices A et $A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite ssi $\ker A = \ker A'$

(ii) Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en ligne réduite.

Thm 25 (Gauss) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice triangulaire supérieure dans la même orbite que A.

App. 26 : Résolution de systèmes linéaires par l'algorithme de Gauss, calcul du déterminant, du rang.

2. Action par équivalence et conjugaison : réduction.

Déf 27 $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ agit par équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:
$(P,Q) \cdot A = PAQ^{-1}$

Thm 28 (rang) $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite ssi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Un système de représentants des classes d'équivalence est donné par les matrices $I_{m,n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prop. 29 : $|\mathcal{O}rb(A)| = \dfrac{|GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})|}{|Stab(A)|}$ où $\mathbb{K}$ corps fini

App. 30 : Dénombrement des matrices de rang r dans un corps fini

Prop. 31 : Si $\mathcal{O}_r$ désigne l'orbite des matrices $m \times n$ de rang r alors $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigcup_{0 \le s \le r} \mathcal{O}_s$ (réunion disjointe).

Déf 32 $GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :
$P \cdot A = PAP^{-1}$.

Prop. 33 Le polynôme caractéristique est un invariant total pour l'action par conjugaison sur les matrices diagonalisables.

C-ex 34 : Ce n'est pas le cas du pol. minimal : $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$

Ex. 35 : Sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ il y a $\displaystyle\sum_{n_1+\dots+n_q=n} \frac{|GL_n(\mathbb{K})|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{K})|}$ matrices diagonalisables.

Thm 36 Les sauts de dimension dans la suite des noyaux itérés est un invariant total pour l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur les matrices nilpotentes.

App 37 : Réduction de Jordan des matrices nilpotentes.

Thm 38 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dim n. Il existe une unique suite de polynômes $P_1, \dots, P_r$ et une famille de sev $E_1, \dots, E_r$ tels que :
(i) $P_1 | \dots | P_r$ (ii) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ (iii) E_i est stable par u et $u|_{E_i}$ est un endo. cyclique de polynôme caractéristique P_i.

App 39 : Réduction de Frobénius

3. Action par congruence. $\mathbb{K}$ corps de carac $\neq 2$

Prop 40 $GL_n(\mathbb{K})$ agit par congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$: $P \cdot A = PA\,{}^tP$

Thm 41 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}rb(A) = \mathcal{O}rb(A') \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}rb(A) = \mathcal{O}rb(A') \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ et A et A' ont même signature

Déf 42 $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop. 43 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{O}rb(I_n) = \{ {}^tPP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P \in GL_n(\mathbb{R}) \}$.

Déf 44 . $Stab(I_n) \equiv \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{ P \in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tPP = I_n \}$.
. $Stab(I_{p,q}) \equiv \mathcal{O}(p,q) = \{ P \in GL_n(\mathbb{R}),\ PI_{p,q}\,{}^tP = I_{p,q} \}$.

Prop 45 : $\mathcal{O}(p,q) \simeq \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Thm 46 : Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, Alors il existe une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q) = Stab(S)$ où $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ associée à q. [DEV]

Leçon 102

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.

102 - Groupe des nombres complexes de module 1 - Sous-groupe des racines de l'unité - Applications -

1) Nombres complexes de module 1

Def : Le groupe des nombres complexes de module 1, le noyau du morphisme de groupe $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*_+$, $z \mapsto |z|$ - On le note $\mathbb{U}$.

1. La fonction exponentielle complexe - fonctions trigonométriques -

Def : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Prop : exp est un morphisme $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ surjectif.

Def : Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$ et $\sin t = \mathrm{Im}(e^{it})$.

Thm : exp réalise un morphisme de groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$ surjectif et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ - En particulier $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Def : Tout $z \in \mathbb{C}$, s'écrit de manière unique sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ (module) et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (argument).

Prop (Moivre) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Prop (Euler) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Appl : Linéarisation de $\sin^n t$ et $\cos^n t$, calcul de $\sum_{n=0}^{N} \sin(nx)$ (cf Fejer).

Déf/Prop : $\cos nx = T_n(\cos x)$ où $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k (-1)^k$ (polynôme de Tchebycheff).

2. Angles et rotations

Def : On appelle $SO_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des isométries positives du plan

Prop : $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{U}$.

Def : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle rotation d'angle θ l'image de θ par l'isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to SO_2(\mathbb{R})$ obtenu en quotientant $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{U} \to SO_2(\mathbb{R})$ -

Prop : Étant donnés deux vecteurs unitaires du plan, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre -

Def - On définit la relation d'équivalence suivante sur les couples de vecteurs du plan : $(u,v) \mathcal{R} (u',v') \Leftrightarrow$ il existe une rotation f tq $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ - On appelle angle orienté de u et v la classe d'équivalence de (u,v). On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés -

Prop : L'app $\mathcal{A} \to SO_2(\mathbb{R})$ qui à un angle de représentant (u,v) associe l'unique $f \in SO_2(\mathbb{R})$ tq $f(u) = v$ est bien définie et bijective -

Coro $\mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est surjective et induit l'isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$.

3. Le théorème de relèvement et applications -

Théorème : Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$. On considère $\gamma : [a,b] \to \mathbb{U}$ une application continue telle que $\gamma(a) = e^{i\theta_0}$. Alors il existe une unique application continue $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ envoyant a sur θ_0 telle que $\forall t \in [a,b]$, $\gamma(t) = e^{i\theta(t)}$

Def : θ s'appelle un relèvement C^0 de γ.

Def : Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ est un lacet, on appelle degré de γ l'entier $\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ où θ est un relèvement C^0 de $\gamma/|\gamma|$.

Appl : Soit $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application C^0. Alors il existe un point $\omega \in \mathbb{S}^2$ tel que $g(\omega) = g(-\omega)$ (Antipodensatz de Borsuk)

Appl (théorème de Brouwer) - Toute application C^0 $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ admet un point fixe -

II - Racines de l'unité

1 - Sous-groupes des groupe des nombres complexe de module 1

Prop. Les sous-groupes de $\mathbb{U}$ sont soit dense, soit finis de la forme
$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{U},\ z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Prop. Les endomorphismes C^0 de $(\mathbb{U}, \times)$ sont les $P_n : \mathbb{U} \to \mathbb{U},\ z \mapsto z^n$ (Fourier)

Prop. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_n$ est un groupe cyclique d'ordre n. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un isomorphisme est donné par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n,\ [k] \mapsto e^{2ik\pi/n}$

Déf. On appelle racine n-ème primitive de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_n$. On note $\mathbb{U}_n^*$ l'ens. des racines n-ème primitive de l'unité.

Ex : $\mathbb{U}_3^* = \{j, j^2\}$.

Prop : $\mathbb{U}_n^* = \{e^{2ik\pi/n},\ 1 \le k \le n,\ k \wedge n = 1\}$ et $\mathbb{U}_n = \bigcup_{d \mid n} \mathbb{U}_d^*$

Corollaire. $|\mathbb{U}_n^*| = \varphi(n)$

App : $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$.

2 - Cyclotomie et applications

Déf (Polynôme cyclotomique). $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n^*} (X - \zeta)$.

Prop : $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X)$ **App :** Calcul des Φ_n par récurrence.

Ex : $\Phi_6 = X^2 - X + 1$. Si p premier $\Phi_p = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$.

Prop : $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$

Thm : Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{Z}[X]$.

Corollaire. Le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de toute racine primitive n-ème de l'unité ζ est Φ_n. En particulier $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

App : théorème de Wedderburn — (AVANT)

3. Polygônes réguliers

Déf : Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le polygône régulier $\mathcal{P}_n$ à n côtés est le polygône formé par les affixes des racines n-ème de l'unité.
Le groupe diédral $\mathcal{D}_n$ est le sous-groupe des isométries du plan affine qui laissent $\mathcal{P}_n$ invariant.

Prop. Le groupe diédral $\mathcal{D}_n$ est d'ordre $2n$: il est engendré par une symétrie axiale s et la rotation r d'angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$.
$\mathcal{D}_n = \langle r, s \mid r^n = e,\ s^2 = e,\ srs = r^{-1} \rangle$.

CONSTRUCTIBILITÉ

[Gozard], [Carrega], [Jeannerod-Lines]

III - APPLICATIONS DANS LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

1- Caractères linéaires d'un groupe abélien fini.

Cadre : G est un groupe abélien fini.

Déf : On appelle caractère de G tout morphisme $\chi : G \to \mathbb{C}^*$
On appelle dual de G et on note $\hat{G}$ l'ensemble de ces caractères

Prop : Soit $n = |G|$. Pour tout $\chi \in \hat{G}$ et tout $g \in G$, $\chi(g) \in U_n$.

Prop (groupe cyclique) : Si G est cyclique d'ordre n, engendré par g alors les éléments de $\hat{G}$ sont de la forme $\chi_j : g^k \mapsto \omega^{jk}$ où ω est une racine primitive n-ième de l'unité.

Ex : Tables de caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$, $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$..

Thm : $\hat{G}$ forme une base orthonormée de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ munie du produit scalaire $\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$

App : théorème de structure des groupes abéliens finis.

2. Transformée de Fourier discrète.

Déf : On appelle transformée de Fourier sur G l'application $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[\hat{G}]$, $f \mapsto \hat{f}$ où $\forall \chi \in \hat{G}$, $\hat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$.

Déf : On appelle transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^N$ l'application $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, $(f(n))_{1 \le n \le N} \mapsto (\hat{f}(n))_{1 \le n \le N}$ où

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=1}^{N} f(k) \exp\left(-2i\pi kn/N\right)$$

Rem : Si $f \in \mathbb{C}^N$, $\hat{f}(n) = \hat{f_0}(\chi_n)$ où $\begin{cases} f_0 : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, [k] \mapsto f([k]) \\ \chi_n : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, [k] \mapsto e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} \end{cases}$

Prop (inversion) : $\forall f \in \mathbb{C}^N$, $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e^{2ikn\pi/N}$

Prop : $\mathcal{F} : (\mathbb{C}^N, *) \to (\mathbb{C}^N, \cdot)$ est un morphisme d'algèbre

App : Systèmes circulants.

Théorème (FFT) : Il existe un algorithme permettant de calculer la transformée de Fourier discrète de $f \in \mathbb{C}^N$ (ou son inverse) où $N = 2^k$ en $O(N \log_2 N)$ opérations.

App : Multiplications de polynômes.

App : Calcul numérique de la solution de l'équation de la chaleur dans un cercle (solution explicite ou par un schéma aux différences finies).

[voir leçon 110].

Leçon 103

Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

J'ai recopié Jeanneret, Lines *Invitation à l'Algèbre* dans l'ordre, sauf pour la fin. Il est probablement plus pertinent d'inclure la partie représentations dans les autres.

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient

I - QUOTIENTER

1) Généralités

Def : Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X, le quotient de X par $\mathcal{R}$ noté $X/\mathcal{R}$ est l'ens. des classes d'équivalence.

Def : Dans le cas des groupes, on considère la relation :
- si H ss-groupe de G, on définit $x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.
- L'ensembles des classes d'équivalence pour cette relation est $\{xH, x \in G\}$: c'est l'ensemble des "classes à gauche".
- Le quotient de G par $\mathcal{R}_H$ est noté G/H.

Rem : G/H n'est pas un groupe en général. Ex :

Définition : L'indice de H dans G est l'entier $[G:H] = \text{card}(G/H)$

Théorème (Lagrange) : Pour un groupe fini $|G| = |H|\,[G:H]$.

Application : classification des groupes d'ordre premier.

Application : Groupes cycliques.

2) Sous-groupe normal

Définition : H est dit normal dans G lorsque $\forall x \in G$, $xHx^{-1} = H$. On note $H \triangleleft G$

Théorème : Si H est normal, alors G/H est muni d'une structure de groupe $\pi(x)\cdot\pi(y) = \pi(x\cdot y)$.

Prop * Tout ss-groupe d'un groupe abélien est normal
* Tout ss-groupe d'indice 2 est normal.
* le noyau d'un homomorphisme est un sous-groupe normal. Réciproquement, si $H \triangleleft G$ alors $H = \ker \pi$.

Définition : Si $H \subset G$ est un sous-groupe, le normalisateur de H dans G est l'ensemble $N_G(H) = \{g \in G, ghg^{-1} \in H \ \forall h \in H\}$
C'est un ss-groupe de H qui contient H, $H \triangleleft N_G(H)$.
$N_G(H)$ est le plus grand ss-groupe de G contenant H dans lequel H est normal.

Exemples :
- $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$: $k\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$.
- rotations $\triangleleft \mathcal{D}_n$
- rotations du cube pas normal.

Def : Un groupe est dit simple s'il n'admet de ss-groupe normal propre.

Exemple :
- $\mathcal{A}_n$ est simple si $n \geq 5$.
- $SO_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$.

II - THÉORÈMES D'ISOMORPHIE

1) Le Premier

Théorème (1ème thm d'isomorphie). Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Alors φ induit un isomorphisme entre $\frac{G}{\ker\varphi}$ et $\mathrm{Im}\varphi$ de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker\varphi & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & \mathrm{Im}\varphi \end{array}$$

Exemples

2) Le deuxième

Théorème (2e) Soient H et J deux sous-groupes d'un groupe G. On suppose $J \lhd G$. Alors HJ est un ss-groupe de G et on a un iso Φ qui fait commuter :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & HJ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \frac{H}{H\cap J} & \xrightarrow{\Phi}_{\sim} & \frac{HJ}{J} \end{array}$$

Exemple : $G=\mathbb{Z}$, $H=k\mathbb{Z}$, $J=l\mathbb{Z}$, $\dfrac{k\mathbb{Z}}{\mathrm{ppcm}(k,l)\mathbb{Z}} \simeq \dfrac{\mathrm{pgcd}(k,l)\mathbb{Z}}{l\mathbb{Z}}$

3) Le troisième

Théorème. $H \lhd G$, $J \lhd G$ et $H \subset J$ alors $\dfrac{G/H}{J/H} \cong \dfrac{G}{J}$ (bien défini)

Exemples : $G=\mathbb{Z}$, $J=k\mathbb{Z}$, $H=kl\mathbb{Z}$ alors $\dfrac{\mathbb{Z}/kl\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}/kl\mathbb{Z}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$.

III - CENTRE, COMMUTATEURS, GROUPE DÉRIVÉ

1) Centre, commutateurs, dérivé : définitions

Déf : $Z(G) = \{g \in G,\ gx = xg \text{ pour tout } x \in G\}$.

Propº : $Z(G) \lhd G$ et $Z(G)$ abélien.

Ex : Dans $GL_n(\mathbb{K})$, $Z(G) = \{\lambda \mathrm{Id},\ \lambda \neq 0\}$

Déf : Si $x, y \in G$ on définit leur commutateur : $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Prop : $[x,y] = e \iff x$ et y commutent, $[x,y]^{-1} = [y,x]$ et $g[x,y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$.

Déf : Le groupe dérivé de G, noté G' ou $D(G)$, est le sous-groupe engendré par les commutateurs de G

On a $G' \lhd G$.

Déf : Le quotient G/G' s'appelle l'abélianisé de G. C'est un groupe abélien.

Exemples : — — — —

2) Groupes résolubles.

Déf : Si G est un groupe et $(G^{(k)})_k$ la suite de ses groupes dérivés successifs, on a :

$G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \trianglerighteq \dots$

G est dit résoluble s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $G^{(k)} = \{e\}$.

Exemple : $n \geq 3$, $\mathcal{D}_n$ est le groupe engendré par r^2, il est cyclique donc $\mathcal{D}_n^{(2)} = \{e\}$.

Théorème : G est résoluble ssi $\exists$ une suite finie de sous groupe $N_0, \dots, N_k$ de G telle que :

(i) $\{e\} = N_k \triangleleft N_{k-1} \triangleleft \dots \triangleleft N_1 \triangleleft N_0 = G$.

(ii) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, N_{i-1}/N_i est abélien.

Théorème : G groupe H sous groupe de G.

(i) G résoluble $\Rightarrow$ H résoluble.

(ii) $H \triangleleft G$, G résoluble $\Rightarrow$ G/H résoluble.

(iii) $H \triangleleft G$, H et G/H résolubles $\Rightarrow$ G résoluble.

Prop : Un groupe G est simple et résoluble ssi il est cyclique d'ordre premier

Feit-Thompson + applications [Ulmer]

IV. PROBLÈMES DE CLASSIFICATION.

DÉF PRODUIT DIRECT

DÉF PRODUIT SEMI-DIRECT

THÉORÈME DE SYLOW.

THÉORÈME CHINOIS + CLASSIFICATION DES GROUPES ABÉLIENS FINIS

+ AUTRES EXEMPLES DE CLASSIFICATIONS.

4 groupes d'ordre 12.

V / REPRÉSENTATIONS ?

Déf (caractère)

Déf (noyau).

Théorème

Exemple.

Corollaire.

Leçon 104

Groupes finis. Exemples et applications.

104 - Groupes finis - Exemples et applications

I - OUTILS DE BASE POUR L'ÉTUDE DES GROUPES FINIS

1. Ordre et indice

Définition 1. L'ordre d'un groupe G est le cardinal $|G|$ de son ensemble sous-jacent G est un groupe fini lorsque $|G| < +\infty$.

Exemples 2 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$.

Définition 3. L'ordre d'un élément $g \in G$ est l'ordre du sous-groupe $\langle g \rangle \subset G$.

Exemple 4 : L'ordre d'une transposition dans $\mathfrak{S}_n$ est 2.

Définition 5. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. L'ensemble des classes à gauche $\{gH, g \in G\}$ est noté G/H et l'indice de H dans G est $[G:H] = |G/H|$.

Théorème 6 (Lagrange). Toutes les classes à gauche relativement à un sous-groupe $H \subset G$ ont pour cardinal $|H|$. Si G est un groupe fini, on a l'égalité : $|G| = |H|\,[G:H]$

Corollaire 7. L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.

Application 8 : Si G est un groupe fini d'ordre p premier alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. Produit direct

Proposition 9. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G tels que
(i) $G = HK$ (ii) $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$ (iii) $H \cap K = \{e\}$.
Alors G est isomorphe au produit direct $H \times K$.

Remarque 10. Sera utile pour la classification des groupes abéliens finis.

2. Actions de groupe

Proposition 11 Soit G fini agissant sur X fini, alors :
$$|G| = |\mathrm{Orb}_G(x)| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)|$$

Théorème (Burnside). Le nombre d'orbites N vérifie : alors :
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \quad \text{où} \quad X^g = \{x \in G,\ g(x) = x\}.$$

Théorème (Cauchy) Si p premier $p \mid |G|$ alors il existe un élément d'ordre p. **Ex :** Si $|G| = 2p$ $G \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2p\mathbb{Z}}$ ou $G \simeq \mathcal{D}_p$.

3. Théorème de Sylow et p-groupes

Théorème (Sylow) Soit G un groupe fini et p premier tel que $|G| = p^m k$ où $m \geq 1$ et $k \wedge p = 1$. Alors :

(i) G contient au moins un sous-groupe d'ordre p^m.
(ii) Les sous-groupes d'ordre p^m de G sont conjugués.
(iii) Le nombre N_p de sous-groupe d'ordre p^m de G vérifie :
$$N_p \equiv 1 \ [p] \quad \text{et} \quad N_p \mid k$$
(iv) Tout p-sous groupe de G est contenu dans au moins un sous-groupe d'ordre p^m

Définition : Un sous-groupe d'ordre p^m de G sera appelé p-Sylow.

Proposition. Si S est un p-Sylow de G, on a :
$$S \trianglelefteq G \iff S \text{ est l'unique } p\text{-Sylow de } G.$$

Application : Il n'y a pas de groupe simple d'ordre 36

Application : Soit $n \in \mathbb{N}$. Il n'y a qu'un seul groupe d'ordre n ssi n et $\varphi(n)$ sont premiers entre eux.

Application : groupes d'ordre pq, ~~p~~ ← PSD

Définition : Un p-groupe est un groupe d'ordre p^n, $n \geq 1$.

Théorème : Le centre des p-groupes est trivial [FG]

Théorème : Les groupes d'ordre p^2 sont isomorphes à $\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}}$ ou $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

II - FAMILLES DE SOUS-GROUPES INTÉRESSANTES

1 - Groupes abéliens

Théorème (chinois) : Si $m \wedge n = 1$ $\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Théorème (classification des groupes abéliens de génération finie)
Ils sont isomorphes à $\frac{\mathbb{Z}}{m_1\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m_2\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{m_s\mathbb{Z}}$, $m_j \mid m_{j+1}$.

Application : classification des groupes abéliens d'ordre 36

(preuve ↑ ; ↓ avec des représentations)

2 - Groupes cycliques

Définition : G est un groupe cyclique s'il est un groupe fini monogène

Exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Contre-exemple : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

Théorème : Les seuls groupes cycliques d'ordre n est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition : Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique

Théorème : Soit G cyclique d'ordre n. Pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d

3 - Groupes simples

Déf° : Un groupe est dit simple lorsqu'il n'a pas de sous-groupe distingué propre

Exemple : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple ssi p premier

Proposition : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$

(chaînes
groupes résolubles)

III - GROUPES FINIS CLASSIQUES

1 - Le groupe des (symétriques) permutations

Déf : $\mathfrak{S}_n$ groupe des permutations d'un ensemble à n éléments
$|\mathfrak{S}_n| = n!$

Proposition : La signature est l'unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$

Proposition : générateurs de $\mathfrak{S}_n$

Proposition : Si $n \geq 3$, le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial

Théorème (Cayley) : Si G groupe fini d'ordre n. Alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$

Définition : groupe alterné

2. Groupes diédraux

Définition - $\mathcal{D}_n$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préserve le polygône régulier à n côtés.

Proposition $\mathcal{D}_n$ est engendré par la symétrie et la rotation r_n.

⋮

3. Groupes linéaires

$GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$ ----

Dénombrement.

4. Quaternions ? 5. Groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

IV - ÉLÉMENTS DE CLASSIFICATION

1. Groupes finis d'ordre ≤ 32 [JL] [Aless] Faire un tableau

Théorème (Groupes d'ordre 4) : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Théorème (Groupes d'ordre 6) : $\mathcal{D}_3$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Théorème (groupes d'ordre 8) : difficile.

2. Produit semi-direct

Définition - G_1, G_2 deux groupes, $\varphi : G_2 \to Aut(G_1)$ homo de gp. $G_1 \rtimes_\varphi G_2$ dont la loi est $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \varphi(x_2)(y_1), x_2 y_2)$.

Proposition : Cela définit une loi de groupe.

Exemple : $\mathcal{D}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème : Soit G groupe et $N \lhd G$ et $p : G \to G/N$ il y a équivalence entre
(1) $\exists s : G/N \to G$ telle que $p \circ s = id_{G/N}$.
(2) $\exists H \subset G$ tq $p|_H : H \xrightarrow{\sim} G/N$. On dit que H relève G/N.
Dans ce cas, il existe un produit semi direct $G \simeq N \rtimes H$.

Prop : $[G:N] < \infty$. Les sous-groupes qui relèvent G/N sont exactement ceux qui vérifient $|H| = [G:N]$ et $N \cap H = \{1\}$.

Prop : Soit $a \in Aut(H)$ alors $N \rtimes_\varphi H \simeq N \rtimes_{\varphi \circ a} H$.

V / Représentations ?

* classification des groupes abéliens.
* Table de caractères et ss-groupes distingués.

Leçon 106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Il manque une partie géométrie à la fin.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

I. ÉTUDE ALGÉBRIQUE

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n

1. Définition, interprétation matricielle

Déf : $GL(E)$ est le groupe des $\mathbb{K}$-automorphismes de E.

Déf : $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices $n\times n$ inversibles à coef dans $\mathbb{K}$

Prop : La donnée d'une base de E définit un isomorphisme $GL(E)\simeq GL_n(\mathbb{K})$

Prop : L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ est invariante par changement de base et $M\in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det M\in\mathbb{K}^\times$.

Prop / Déf : $\det : GL(E)\to\mathbb{K}^\times$ est un morphisme de groupe. Son noyau est le groupe spécial linéaire $SL(E)$.

Prop : On a une suite exacte $1\to SL(E)\to GL(E)\xrightarrow{\det}\mathbb{K}^\times\to 1$

et $GL(E)\simeq SL(E)\rtimes\mathbb{K}^\times$

Prop (corps fini) : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n-q^k)$; $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(q^n-q^k)$

Prop : $GL_n(\mathbb{C})\simeq GL_m(\mathbb{C}) \iff n=m$.

2. Parties génératrices

Déf : Soit H un hyperplan de E, $u\in GL(E)$ tel que $u_{|H}=id_H$. On dit que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite D et de rapport $\lambda\neq 1$ lorsque u vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

(i) $\lambda=\det(u)\neq 1$ (ii) dans une base, $Mat(u)=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&\lambda\end{pmatrix}$ (iii) $D=Im(u-id)\not\subset H$

Déf : On dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D lorsque u vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

(i) $\det u=1$ (ii) $D=Im(u-id)\subset H$ (iii) $\exists a\in H\setminus\{0\}$ tel que $\forall x\in E$, $u(x)=x+f(x)a$ (iv) dans une base $Mat(u)=\begin{pmatrix}1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$.

Prop : Soit τ une transvection de droite D et d'hyperplan H. Soit $u\in GL(E)$. Alors $u\tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Lemme : Les $u\in GL(E)$ laissant stable toutes les droites vectorielles sont les homothéties

App : $Z(GL(E))$ est réduit aux homothéties. Le centre de $SL(E)$ est $Z(GL(E))\cap SL(E)$, il est isomorphe à $\{\lambda\in\mathbb{K},\lambda^n=1\}$.

Thm : Les transvections engendrent $SL(E)$. Les dilatations et les transvections engendrent $GL(E)$.

App : L'algorithme du pivot de Gauss et la décomposition LU d'une matrice pour la résolution de systèmes linéaires.

App (Bruhat) : $\mathcal{T}_S$ désigne le groupe des matrices triangulaires sup inversibles sur $\mathbb{K}^n$. On a $GL_n(\mathbb{K})=\coprod_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathcal{T}_S P_\sigma \mathcal{T}_S$ où P_σ est la matrice de permutation σ.

App : $GL_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$. De plus l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ a $n!$ orbites.

3. Quelques sous-groupes de GL(E) et leurs propriétés

Thm : $D(GL_n(\mathbb{K}))=SL_n(\mathbb{K})$ (sauf dans le cas $n=2$, $k=\mathbb{F}_2$)

$D(SL_n(\mathbb{K}))=SL_n(\mathbb{K})$ sauf dans les cas $[n=2, k=\mathbb{F}_2]$ et $[n=2, \mathbb{K}=\mathbb{F}_3]$

rem : $GL_2(\mathbb{F}_2)=SL_2(\mathbb{F}_2)\simeq\mathfrak{S}_3$

Déf : $\frac{GL(E)}{Z(GL(E))} =: PGL(E)$ et $\frac{SL(E)}{Z(SL(E))} =: PSL(E)$.

rem : Si $\mathbb{K}$ est alg. clos, $PSL(E)\simeq PGL(E)$.

Thm : $PSL_n(\mathbb{K})$ est simple sauf dans les cas $[n=2, \mathbb{K}=\mathbb{F}_2]$ et $[n=2, \mathbb{K}=\mathbb{F}_3]$

Déf (groupe orthogonal) : Si q est une forme quadratique sur E, f sa forme bilinéaire associée, on définit $O(q)=\{u\in GL(E), \forall x,y\in E, f(u(x),u(y))=f(x,y)\}$

On note $O_n(\mathbb{R})=\{P\in GL_n(\mathbb{R}), {}^tPP=I_n\}$.

Thm (décomposition polaire) On a un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})$

App : $O(r,s)\simeq O_r(\mathbb{R})\times O_s(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{rs}$.

Déf (groupe spécial orthogonal) $SO(E)=SL(E)\cap O(E)$.

Prop : maximalité du groupe orthogonal.

II. ÉTUDE TOPOLOGIQUE LORSQUE $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

1. Topologie de $GL_n(\mathbb{K})$ et de ses sous-groupes.

Prop : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

App : Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles.

App : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Prop : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'adhérence des matrices diagonalisables est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables.

Prop (connexité). (1) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes. (2) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (3) $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs. (4) $O(n)$ a deux composantes connexes homéomorphes.

App : L'ensemble $P_n(\mathbb{C})$ des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a $n+1$ composantes connexes qui sont les projecteurs de rang r, $r \in \{0, \dots, n\}$.

App : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. (*)

2. Exponentielle matricielle et groupe linéaire.

Déf : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Prop : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^\times$ est un morphisme de groupe.

Thm : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Prop : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Prop : Tout morphisme $f : \mathbb{R}_+ \to GL_n(\mathbb{K})$ est de la forme $f(t) = e^{tM}$.

Prop : Il n'y a pas de sous-groupe arbitrairement petit de $GL_n(\mathbb{K})$.

(*) Thm : Soit $G \subset GL(E)$ un sous-groupe compact. Alors il existe une forme quadratique q sur E telle que $G \subset O(q)$.

3. Structure différentiable, sous-variétés.

Prop : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$.
$O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Déf : Si $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé, $\mathcal{L}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t, e^{tM} \in G\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Thm (Cartan-von Neumann) Tout sous-groupe fermé $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dim \mathcal{L}_G$. L'espace tangent à G en I_n est $\mathcal{L}_G$.

App : Espaces tangents de SL_n, O_n ...

III. ACTIONS DU GROUPE LINÉAIRE SUR LES ESPACES DE MATRICES

1. Action par translation, aspects algorithmiques, conséquences pratiques.

Déf : L'action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par translation à gauche est définie par $GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(P, A) \mapsto PA$.

Prop : Voici une description de l'action par translation à gauche des matrices d'opérations élémentaires (dilatations, transvections, permutation) ...

2. Action par équivalence et conjugaison : réduction.

3. Action par congruence : classification.

RECOPIER 150.

Leçon 107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

J'ai recopié G. Peyré, *L'Algèbre discrète de la Transformée de Fourier* pas tout à fait dans l'ordre.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

G est un groupe fini et V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

I- REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

1- Premières définitions

Déf : Une représentation linéaire de G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ / d'une action $G \times V$

Déf : La représentation est fidèle lorsque ρ est injectif.

NOTATION : On note $\rho_V(g) \equiv g_V \equiv g$

Exemples : . La représentation triviale $\rho : g \longmapsto id_V$.
. L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^3$ par permutation des coordonnées.

Déf : Soient $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ deux représentations linéaires de G. Un G-morphisme est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $\forall g \in G$, $\rho'(g) \circ f = f \circ \rho(g)$.
On parle d'isomorphisme lorsque f est bijective.
On note $Hom_G(V, V')$ l'ensemble des G-morphismes.

Déf : Une sous-représentation W de V est un sous-espace vectoriel de V qui est G-stable : $g(W) \subset W$ $\forall g \in G$.
La représentation quotient est $\bar{\rho} : G \to GL(\frac{V}{W})$

Déf : La dimension d'une représentation est la dimension de l'ev.

Exemple : Si $\varphi \in Hom_G(V_1, V_2)$, $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$ sont des sous-représentations.

2- Exemples importants

Déf (représentation somme) : Si ρ_V et ρ_W sont deux représentations de G on définit $\rho_{V \oplus W}$ par :
$\forall g \in G$, $\forall (v,w) \in V \times W$, $\rho_{V\oplus W}(g)(v \oplus w) = \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$.

Déf (représentation de morphismes) : Si ρ_V et ρ_W sont deux représentations de G, on définit la représentation $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ par :
$\forall g \in G$, $\forall f \in \mathcal{L}(V,W)$, $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) = \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$
(cela définit une représentation).

Déf (représentation duale) : Si ρ_V est une représentation de G On définit ρ_{V^*} la représentation sur le dual V^* de V par $\forall g \in G$, $\rho_{V^*}(g) = {}^t\rho_V(g^{-1})$. On a $\rho_{V^*} = \rho_{\mathcal{L}(V,\mathbb{K})}$ (rep triviale).

Déf (sous-représentation invariante) : Soit ρ_V une représentation de G. Alors $V^G = \{ v \in V, \forall g \in G, \rho(g)(v) = v \}$ est une sous-représentation. Rem : $\mathcal{L}(V,W)^G = Hom_G(V,W)$.

3- Représentations irréductibles

Déf : Une représentation est irréductible lorsque $\{0\}$ et V sont les seules sous-représentations.

Déf : (Opérateur de Reynolds) Soit ρ_V une représentation de G
On définit $R_G \in \mathcal{L}(V,V)$ par : $R_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$.

Prop : R_G est un projecteur sur V^G dont $Tr(R_G) = \dim_{\mathbb{C}}(V^G)$

Déf (application moyennée). Pour $f \in \mathcal{L}(V,W)$, on note $\widetilde{f} := R_G(f) \in \underbrace{\mathcal{L}(V,W)^G}_{\mathrm{Hom}_G(V,W)}$, i.e. $\widetilde{f} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f)$

Théorème : Toute $\mathbb{C}$-représentation non triviale admet un supplémentaire G-stable.

Théorème (Maschke) Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Remarque : Un résultat d'unicité est donné dans la suite.

Lemme (Schur) : V_1, V_2 irr. $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 \neq V_2 \\ \mathbb{C} & \text{si } V_1 = V_2 \end{cases}$.

II - ESPACES DE FONCTIONS ET CARACTÈRES

1 - Fonctions de G dans $\mathbb{C}$.

Déf : On note $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$.
On note pour $g \in G$, $\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h=g \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Rem : Toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ se décompose dans la base $\{\delta_g\}_g$:
$f = \sum_{g\in G} f(g)\,\delta_g$.

Déf : (produit de convolution). Si $f, g : G \to K$, on définit :
$\forall s \in G$, $(f * g)(s) = \sum_{h\in G} f(h)\, g(h^{-1}s)$

Muni, $*$, $(\mathbb{C}[G], *)$ forme une algèbre

Déf (Représentation régulière). C'est la représentation $\rho_r : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ définie par $\forall s \in G$, $\rho_r(s) : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, $f \mapsto \delta_s * f$

Prop : C'est une représentation fidèle.

Déf : Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite centrale lorsque
$\forall (s,g) \in G^2$, $\varphi(sgs^{-1}) = \varphi(g)$.

Déf : $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[G]$.

2 - Caractères

Déf (caractère linéaire). Un caractère linéaire est un morphisme $\chi : G \to \mathbb{C}^*$.

Déf (caractère d'une représentation). Si ρ_V est une représentation de G, son caractère est la fonction de $\mathbb{C}[G]$:
$\chi(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$.

Rem : Si V est de dimension 1, $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$. Dans ce cas une représentation est un caractère linéaire dont le caractère est le caractère lui-même.

Notation : $\widehat{G}$ est l'ensemble des caractères linéaires.

Propriétés : Soit V une représentation de dim. n de G. Alors
(i) $\chi(1) = n$ (ii) $\forall g \in G$, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (iii) χ est une fonction centrale
(iv) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$ (v) $\chi_{\mathcal{L}(V,W)} = \overline{\chi_V}\,\chi_W$ (vi) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$
(vii) Deux représentations isomorphes ont même caractère.

Exemple : Si ρ_r est la représentation régulière, alors
$\chi_r(1) = n$ et si $s \neq 1$, $\chi_r(s) = 0$.

Théorème : • Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle = 1$
• Si χ et χ' sont deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$

Déf : Un caractère est dit irréductible lorsque c'est le caractère d'une représentation irréductible.

3- Application à la décomposition en représentations irréductibles

Théorème : Soit V une représentation de G de caractère χ_V. Alors :

$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} V_i^{\oplus a_i}$ où les V_i sont des représentations irréductibles de G non isomorphes.

avec $a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ et $V_i^{\oplus a_i} = V_i \oplus \dots \oplus V_i$ a_i fois.

De plus $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i=1}^{p} a_i^2$

Corollaire : Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère

Corollaire : V est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Corollaire : Si ρ_r est la représentation régulière $a_i = n_i = \dim_{\mathbb{C}}(V_i)$

Corollaire : $\sum_{i=1}^{p} n_i^2 = |G|$ et pour $s \neq 1$, $\sum_{i=1}^{p} n_i \chi_i(s) = 0$.

Théorème : Les caractères irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales.

Corollaire : Le nombre de rep irr non isom est égal au nb de classes de conj de G

Corollaire : G est commutatif $\Leftrightarrow$ toutes ses rep. irr. sont de degré 1.

4- Tables de Caractères

Déf : C'est le tableau carré $(\chi_i(g_j))_{1 \leq i,j \leq p}$ où les g_j sont des représentants des p classes de conjugaison de G et χ_i des représentants des p classes de caractères irréductibles.

Ex :

Rem : La table ne caractérise pas le groupe

IV - DEUX APPLICATIONS EN THÉORIE DES GROUPES

1- Caractères et sous-groupes distingués

Déf : Le noyau du caractère χ de la représentation $\rho : G \to GL(V)$ est $\ker \chi = \{g \in G,\ \chi(g) = \chi(1)\}$.

Théorème : Les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} \ker \chi_i$, $I \subset \{1, \dots, r\}$ où $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ sont les caractères irréductibles

Corollaire G est simple $\Leftrightarrow \forall i \neq 1$, $\forall g \in G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.

Applications : · sous-groupes distingués de $\mathcal{A}_n$.
· $\mathcal{A}_5$ est simple.

2- Le cas des groupes abéliens

Théorème (structure) Soit G un groupe abélien fini.
Il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $n_r | \dots | n_1$ tels que

$$G \simeq \frac{\mathbb{Z}}{n_1\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{n_r\mathbb{Z}}$$

+ Fourier
+ table des groupes cycliques.

Leçon 110

Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

J'ai recopié G. Peyré, *L'Algèbre discrète de la Transformée de Fourier* pas tout à fait dans l'ordre.

110 Caractères d'un groupe abélien fini et Transformée de Fourier Discrète. Applications.

I- CARACTÈRES ET DUALITÉ

1- Définitions et premières propriétés-

Déf. On appelle caractère de G tout morphisme $\chi : G \to \mathbb{C}^*$. On appelle dual de G et on note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

Prop. Soit G groupe fini de cardinal n. Pour tous $\chi \in \hat{G}$ et $g \in G$, on a $\chi(g) \in U_n$ le groupe des racines n-ème de l'unité. En particulier : $|\chi(g)| = 1$ et $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$.

Déf/Prop. On munit $\hat{G}$ de la loi définie par : $\forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, $\chi_1 \cdot \chi_2 (g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Pour cette loi, $\hat{G}$ est un groupe abélien fini et $\forall \chi \in \hat{G}$, $\chi^{-1} = \overline{\chi}$.

Prop (dual d'un groupe cyclique). Si G est un groupe cyclique d'ordre n engendré par un élément g, alors les éléments de $\hat{G}$ sont de la forme : $\chi_j : g^k \mapsto \omega^{jk}$ pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et où ω est une racine primitive n-ème de l'unité.
En particulier $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$.

Ex : Tables de caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$.

2- Quelques isomorphismes structurels-

Thm (Prolongement). Soit G un groupe abélien fini et $H \subset G$ un ss-groupe. Le morphisme : $\hat{G} \to \hat{H}$, $\chi \mapsto \chi|_H$ est surjectif.

Prop : On note $p : \hat{G} \twoheadrightarrow \hat{H}$ ce morphisme de restriction et $j : \widehat{G/H} \hookrightarrow \hat{G}$ ce morphisme d'extension défini par $j : \widehat{G/H} \to \hat{G}$, $\chi \mapsto \tilde{\chi}$ où $\tilde{\chi}(x) = \chi(xH)$.
On a la suite exacte : $\{1\} \to \widehat{G/H} \xrightarrow{j} \hat{G} \xrightarrow{p} \hat{H} \to \{1\}$.

Corollaire : Soit G un groupe abélien fini. Alors $|G| = |\hat{G}|$.

Thm : L'application de bidualité $ev : G \to \hat{\hat{G}}$ définie par $ev(x)(\chi) = \chi(x)$ est un isomorphisme de groupe.

Corollaire. G et $\hat{G}$ ont même exposant.

App : (théorème de structure des groupes abéliens finis). Soit G un groupe abélien fini. Il existe $l \in \mathbb{N}$ et des entiers $n_r | \dots | n_1$ tels que $G \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}}{n_1\mathbb{Z}}\right) \times \dots \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{n_r\mathbb{Z}}\right)$. Ces entiers sont uniques.

Prop. Soient G_1, G_2 deux groupes abéliens finis, alors :
$\widehat{G_1} \times \widehat{G_2} \to \widehat{G_1 \times G_2}$, $(\chi_1, \chi_2) \mapsto ((g_1, g_2) \mapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2))$ est un isomorphisme.

Corollaire. $\hat{G} \simeq G$ **Ex :** Table des caractères de $(\mathbb{Z}/15)^\times$

3- Orthogonalité.

Déf. Si H est un sous-groupe de G, on appelle orthogonal de H et on note $H^\perp = \{\chi \in \hat{G}, \forall h \in H, \chi(h) = 1\}$. C'est un sous-groupe de $\hat{G}$.

Lemme. Soit G un groupe abélien fini. Pour $\chi \in \hat{G}$, on a $\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } \chi \neq 1 \\ |G| \text{ si } \chi = 1 \end{cases}$

Prop. Soit G un groupe abélien fini. Alors $\hat{G}$ est une famille orthonormale d'éléments, c'est à dire $\forall (\chi_1, \chi_2) \in \hat{G}^2$, $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } \chi_1 \neq \chi_2 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

Prop : $\widehat{G/H} \simeq H^\perp$ et $\hat{G}/H^\perp \simeq \hat{H}$.

II- L'ALGÈBRE $\mathbb{C}[G]$

1- Définitions et premières propriétés-

Déf/Prop. On note $\mathbb{C}[G]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbb{C}$. On le munit du produit scalaire hermitien défini par :
$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$, $\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$.

Déf/Prop. Pour tout $g \in G$, on note $\delta_g : x \in G \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = g \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \in \mathbb{C}[G]$

$(\delta_g)_{g\in G}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}[G]$ et $\forall f\in\mathbb{C}[G]$, $f=\sum_{s\in G} f(g)\delta_g$.

Corollaire : $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$.

Prop. La loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{C}[G]$ par $f_1 f_2 : g \mapsto f_1(g) f_2(g)$ munit $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre commutative.

Déf/Prop. La loi de composition $*$ définie sur $\{\delta_g, g\in G\}$ par $\forall g_1,g_2\in G$, $\delta_{g_1} * \delta_{g_2} = \delta_{g_1+g_2}$ munit $\{\delta_g, g\in G\}$ d'une structure de groupe pour laquelle l'application $g\mapsto \delta_g$ est un morphisme. L'unique loi, encore notée $*$, qui prolonge $*$ par bilinéarité à $\mathbb{C}[G]$ munit $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre commutative.
On a : $\forall f_1,f_2\in\mathbb{C}[G]$, $f_1 * f_2 : g\in G \mapsto \sum_{h\in G} f_1(h) f_2(g-h)$.

2. $\mathbb{C}[G]$, caractères, orthogonalité.

Prop. Si χ est un caractère de G, alors il existe un unique morphisme d'algèbre $\tilde{\chi} : (\mathbb{C}[G], *) \to \mathbb{C}$ qui prolonge χ.

Thm. $\hat{G}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]$.

Corollaire. Les lignes de la table de caractères de G forment une base orthogonale de $\mathbb{C}^{|G|}$ muni de son produit scalaire usuel.

Corollaire. Les colonnes de la table de caractères de G forment une base orthogonale de $\mathbb{C}^{|G|}$ muni de son produit scalaire usuel.

Rem (interprétation probabiliste). Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G. Alors $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

III. TRANSFORMÉE DE FOURIER.

1. Généralités.

Déf : On appelle transformée de Fourier sur G l'application $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[\hat{G}]$, $f\mapsto \hat{f}$ où $\forall \chi\in\hat{G}$, $\hat{f}(\chi) = \sum_{g\in G} f(g)\chi(g) = |G|\langle \bar{\chi}, f\rangle$.

Prop (inversion). $\forall f\in\mathbb{C}[G]$, $f = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\bar{\chi}$.

Thm $\mathcal{F} : (\mathbb{C}[G], *) \to (\mathbb{C}[\hat{G}], \cdot)$ est un isomorphisme d'algèbre.

Prop (Plancherel). $\forall f_1,f_2\in\mathbb{C}[G]$, $\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2\rangle$. En particulier $\forall f\in\mathbb{C}[G]$, $\|f\|^2 = \frac{1}{|G|}\|\hat{f}\|^2$.

App : Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(G, \mathcal{P}(G))$, alors $\forall g\in G$, $\left|\mathbb{P}(g) - \frac{1}{|G|}\right|^2 \le \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\neq\chi_0} |\hat{\mathbb{P}}(\chi)|^2$ où χ_0 est le caractère trivial.

App : Marche aléatoire dans un groupe cyclique.

Prop (Poisson). Si H est un sous-groupe de G et $f\in\mathbb{C}[G]$, alors $\forall g\in G$, $\sum_{h\in H} f(g+h) = \frac{|H|}{|G|}\sum_{\chi\in H^\perp} \hat{f}(\chi)\bar{\chi}(g)$.

Prop (incertitude). Soit $f\in\mathbb{C}[G]$. On a $|\mathrm{Supp}\, f| \times |\mathrm{Supp}\, \hat{f}| \ge |G|$ où $|\mathrm{Supp}\, f|$ désigne la taille du support de f.

2. Transformée de Fourier discrète.

Déf : Si $N\ge 1$ et $f = (f(n))_{n\in\{1,\dots,N\}} \in\mathbb{C}^N$, on appelle transformée de Fourier discrète de f le vecteur $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\{1,\dots,N\}}$ défini par : $\forall n\in\{1,\dots,N\}$, $\hat{f}(n) = \sum_{k=1}^{N} f(k)\exp(-2i\pi kn/N)$.

Prop Si $N\ge 1$ et $f\in\mathbb{C}^N$ alors $\forall n\in\{1,\dots,N\}$, $\hat{f}(n) = \hat{f}_0(\chi_n)$ où $f_0 : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $k+N\mathbb{Z}\mapsto f(k \bmod N)$ et $\chi_n : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$, $k+N\mathbb{Z}\mapsto \exp\left(\frac{-2i\pi kn}{N}\right)$.

Prop. Soit $N\ge 1$. On a :
(inversion) $\forall f\in\mathbb{C}^N$, $\forall k\in\{1,\dots,N\}$, $f(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n) e^{2ikn\pi/N}$
(Plancherel) $\forall f_1,f_2\in\mathbb{C}^N$, $\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{N}\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2\rangle$.

Déf/Prop - Soit $N \geq 1$. Les lois $\cdot$ et $*$ définies sur $\mathbb{C}^N$ par :

$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}^N$, $f_1 f_2 = (f_1(n) f_2(n))$ et $f_1 * f_2 = \left(\sum_{k=1}^{N} f_1(k) f_2(N-k \bmod N) \right)$

munissent $\mathbb{C}^N$ d'une structure d'algèbre commutative -

Prop : $\mathcal{F} : (\mathbb{C}^N, *) \to (\mathbb{C}^N, \cdot)$ est un morphisme d'algèbre -

App (Systèmes circulants). Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ c_N & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2 \\ c_2 & \cdots & c_N & c_1 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_N \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix}$.

C est inversible ssi $\forall n \in \{1, \dots, N-1\}$, $\hat{c}(n) \neq 0$. Dans ce cas, pour tout $b \in \mathbb{C}^N$, l'unique solution de $Cx = b$ est $x = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{\hat{b}(n)}{\hat{c}(n)} \right) \right)$.

3. Transformée de Fourier rapide -

Thm - Il existe un algorithme permettant de calculer la transformée de Fourier discrète de $f \in \mathbb{C}^N$ où $N = 2^k$ en $O(N \log_2 N)$ opérations -

rem : idem pour l'inverse -

Algorithme (FFT) Soit $f \in \mathbb{C}^N$, N étant une puissance de 2.

- On note $f_{pair} = (f(2n))_{0 \leq n \leq \frac{N}{2}}$ et $f_{impair} = (f(2n+1))_{0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1}$
- On calcule récursivement $\widehat{f_{pair}}$ et $\widehat{f_{impair}}$ et $D = \mathrm{diag}(\omega^{-1}, \dots, \omega^{-N/2})$, $\omega = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.
- On a $(\hat{f})_{pair} = 2\left(\hat{f}_{pair} + D\hat{f}_{impair} \right)$ et $(\hat{f})_{impair} = 2\left(\hat{f}_{pair} - D\hat{f}_{impair} \right)$

IV. APPLICATIONS EN ANALYSE NUMÉRIQUE.

1. Multiplication de polynômes -

Soient N une puissance de 2. A, B deux polynômes de degré $\leq N-1$ et $C = AB$. On note a (resp b, c) $\in \mathbb{C}^{2N}$ le vecteur formé des coeff de A complété avec des zéros (resp. B, C) -

- On calcule $\hat{a}$ et $\hat{b}$ par FFT
- On calcule $\hat{a} . \hat{b}$
- On calcule $c = \mathcal{F}^{-1}(\hat{a} . \hat{b})$ par FFT.

$\to$ il y a $O(N \log N)$ opérations -

2. L'équation de la chaleur dans un cercle : résolution explicite -

On veut résoudre $\begin{cases} \partial_t v = \nu \partial^2_{xx} v & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times S^1 \\ v(0,x) = v_0(x) \in C^2 \end{cases}$ (*)

Thm - L'équation (*) a une unique solution donnée par :

$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times S^1$, $v(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{v_0}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$

où $\hat{v_0}(n) = \int_{[0,1]} v_0(x) e^{-2i\pi n x} dx$. On note $c_n = \hat{v_0}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t}$.

$\to$ On calcule $\hat{v_0}(n)$ en échantillonnant v_0 et en appliquant l'algorithme de FFT au vecteur échantillonné.

3 - L'équation de la chaleur dans un cercle : schéma aux différences finies -

Déf (θ-schéma). Soient $N \geq 1$, $\Delta t > 0$, $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et $\theta \in [0,1]$ - Le θ-schéma associé au problème (*) est la suite de vecteurs $(v_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ définie par

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \theta\nu \frac{-v_{j-1}^{n+1} + 2v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\nu \frac{-v_{j-1}^n + 2v_j^n - v_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

et la convention $v_{N+1}^n = v_0^n = 0$.

Prop - En posant $g = (s, v, \dots, s, -2s) \in \mathbb{C}^N$, le θ-schéma s'écrit :

$v^{n+1} - v^n = g * (\theta v^{n+1} + (1-\theta) v^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $v^0 = (v_0(j\Delta x))$.

et $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $\hat{v}^{n+1}(k) = \frac{1 + (1-\theta)\hat{g}(k)}{1 - \theta \hat{g}(k)} \hat{v}^n(k)$; $\hat{g}(k) = 2s\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1 \right)$, $s = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

Thm - Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et d'ordre 2 en temps et en espace si $\theta = \frac{1}{2}$ -

- Le schéma est stable en norme L^2 inconditionnellement si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ et sous la condition CFL $2(1-2\theta)s \leq 1$ si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.
- (Lax) Le schéma est convergent (en norme L^2).

Leçon 121

Nombres premiers. Applications.

Le plan n'est pas vraiment dans le bon ordre. Tout ce qui concerne les tests de primalité devrait par exemple se trouver à la toute fin (en tout cas après corps finis). Je crois que ce plan est assez mauvais.

121. Nombres premiers. Applications

I - L'ARITHMÉTIQUE ET LES NOMBRES PREMIERS

1 - Définitions - Propriétés élémentaires

Déf : Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et p.
L'ens des nb premiers est l'ens des irr de l'anneau $\mathbb{Z}$

Thm (Bézout) : $a \wedge b \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}$ tq $au + bv = 1$

Prop : n premier $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ anneau intègre.

Propriété : $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$.

Théorème (fondamental de l'arithmétique) : $\mathbb{Z}$ est factoriel
i.e - tout $n \geq 2$ se décompose de manière unique
en produit de nb premiers (à l'ordre des facteurs près)

Théorème (Fermat) : $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \ [p]$.
(Euler) : $k \wedge n = 1 \Rightarrow k^{\varphi(n)} \equiv 1 \ [n]$

Théorème (Wilson) $p \geq 2$ est premier ssi $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$

App : $P \mid \binom{p}{k}$ Frobénius.

2 - Répartition des nb premiers

2.1 Trucs "élémentaires"

Thm : Il existe une infinité de nb premiers.
Prop : $\sum \frac{1}{p} = +\infty$

Thm (Bertrand) : $\forall n \geq 2$, $\exists p \in \mathbb{P}$, $p \in \{n, \dots, 2n-1\}$.

Thm (Tchebyshev) $\exists a, b > 0$ tq $\forall n > 0$, $b \frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq a \frac{n}{\ln n}$

2.2 "Trucs moussés"

Fonctions arithmétiques

* Möbius + inversion
* Von Mangoldt ?
...

Théorème (des nb premiers) : $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$.

Conjecture (Riemann) $\Leftrightarrow \pi(n) \sim Li(n)$.

Déf : $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ si $\Re e(s) > 1$ + prolongement analytique.

$$\zeta(s) = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Théorème (Progression arithmétique) Si $a \wedge b = 1$, il existe une infinité de nb premiers $\equiv a \ [b]$.

Proposition : $\forall N \geq 1$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\{n+1, \dots, n+N\}$ ne contient aucun nb premier. (Nourdin).

3- Nombres premiers et cryptographie

Prop. Soient p, q des nombres premiers et $n = pq$. Soient c, d des entiers tels que $cd \equiv 1 \ [\varphi(n)]$.
Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $t^{cd} \equiv t \ [n]$.

Rem On utilise cette propriété pour le système de cryptage RSA.

4- Tests de primalité (épisode 1) [Gourdon, FGN].

APRÈS CORPS FINIS.

Sur la loi de réciprocité quadratique [Gourdon].

Prop : h, m entiers, $m \geq 2$, et $1 \leq h \leq 2^m - 1$.
Soit $n = h 2^m + 1$. Soit $p > 2$ premier tq $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$.
n premier $\Leftrightarrow p^{(n-1)/2} \equiv -1 \ [n]$.

Prop (Pépin). F_k premier $\Leftrightarrow 3^{(F_k-1)/2} \equiv -1 \ [F_k]$.

5- Sur quelques classes de nombres en lien avec les nombres premiers

Déf (nombre de Carmichael). $n \geq 2$ non premier tq que $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^n \equiv a \ [n]$.

Prop : Les nombres de Carmichael sont ceux de la forme $p_1 \cdots p_k$ (p_i premiers distincts) tels que $p_i - 1 \mid n - 1$ pour tout i.

Rem : Il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Déf (nombre de Mersenne) De la forme $2^p - 1$ où p premier

Déf (nombre de Fermat). $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Prop [Nourdin]. Les F_n sont deux à deux premiers entre eux.
Si $p \mid F_n$ alors $p = k 2^{n+2} + 1$

Théorème (Gauß-Wantzel) Polygônes réguliers constructibles à la règle et au compas.

II. THÉORIE DES GROUPES

1- p-groupes [JC]

Déf : Groupe d'ordre p^m ou p premier, $m \geq 1$.

Théorème : Si G est un p-groupe, $Z(G)$ non trivial

Corollaire. Si G p-groupe d'ordre p^m, $\exists \ \{e\} = H_0 \subset \cdots \subset H_m = G$ tq $|H_i| = p^i$, $H_i \lhd H_{i+1}$ et $\frac{H_{i+1}}{H_i} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

Corollaire. Si G est un p-groupe d'ordre non premier alors G n'est pas simple.

Théorème (Classification des groupes d'ordre p^2) : $\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}}$ ou $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

2. Théorèmes de Sylow

:

Aff : Groupes d'ordre pq, d'ordre 12 etc –

III – CORPS FINIS

1. Premiers

Def (caractéristique) sous-corps premiers $\simeq \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$)

Thm : $\mathbb{F}_{p^n}$ + phé élémentaires style Frobenius –

Aff : Chevalley-Warning + Erdös-Ginzburg-Ziv.

Carrés, symbole de Legendre.
↳ théorème des 2 carrés –

Polynômes : – irr de $\mathbb{F}_q$
– réduction modulo p.
– critère d'irr : Eisenstein –

–

Leçon 122

Anneaux principaux. Applications.

Cette leçon est trop difficile pour moi et le plan est nul.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications

I. STRUCTURE DES ANNEAUX PRINCIPAUX

RDO

1. Notion d'idéal

$(A,+,\cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

Déf : Un idéal de A est une partie I de A telle que
i) I est un sous-groupe additif de $(A,+)$
ii) $\forall a \in A, \forall i \in I, ai \in I$

Thm : L'intersection d'une famille d'idéaux est un idéal.

Déf : L'idéal engendré par une partie est l'intersection de tous les idéaux contenant cette partie.

Déf : L'idéal engendré par $a \in A$ est noté (a). Il est dit principal

Déf : Un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux est dit principal.

Théorème L'anneau quotient A/I par la relation d'équivalence $x - y \in I$ est compatible avec la structure de A.
Il y a une bijection $\{\text{idéaux de } A \text{ contenant } I\} \longrightarrow \{\text{idéaux de } A/I\}$

Théorème : Si $I \subset J$, $\dfrac{A/I}{J/I} \simeq \dfrac{A}{J}$.

2) Stabilité et exemples

Exemple : Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$.

Exemple : $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ est un anneau principal. FG Ex.

Proposition : $A[X]$ principal $\Leftrightarrow$ A est un corps.

Contre-exemple : $\mathbb{K}[X]$ est principal mais pas $\mathbb{K}[X,Y]$

3. Les anneaux principaux et les autres. Perrin, FG

commutatifs
intègre
factoriel
PRINCIPAL
euclidien

Déf : Un anneau est dit noethérien lorsque ses idéaux sont engendrés par une partie finie.

Proposition : Un anneau est noethérien ssi toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

Théorème : A noethérien $\Rightarrow$ $A[X]$ noethérien.

Exemples et contre-exemples :
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est principal mais pas euclidien.

II - ARITHMÉTIQUE DANS LES ANNEAUX PRINCIPAUX

1 - L'héritage de l'intégrité. RDO

Ici A est un anneau intègre.

Déf : On dit que $a \in A$ divise $b \in A$ et on note $a|b$ lorsqu'il existe $q \in A$ tel que $b = aq$.
Si $a \neq 0$, q est unique.

Propo : $a|b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$. $(a) = (b) \Leftrightarrow \exists u$ inversible, $a = bu$
On dit alors que a et b sont associés.

Déf : Un irréductible de A est un élément non inversible dont les seuls diviseurs sont les éléments inversibles et ceux qui lui sont associés. pgcd ppcm [CL]

Déf : Lorsque A est principal et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A, on définit :
$\delta = \text{pgcd}(a_i)$ et $\nu = \text{ppcm}((a_i)_{i \in I})$ tout générateurs respectifs de $\sum_{i \in I}(a_i)$ et $\bigcap_{i \in I}(a_i)$ dans leur ens.

Déf : a et b sont dits premiers entre eux lorsque 1 est un pgcd de la famille.

Prop : Si p est un irréductible de A, il est premier avec $a \in A$ ssi $p \nmid a$.

$(a)+(b)=(d)$ ✓

Théorème (Bézout) : $(a_i)_{i \in I}$ premiers entre eux dans leur ensemble ssi $\exists$ une famille $(u_i)_{i \in I}$ presque nulle tq $\sum_{i \in I} u_i a_i = 1$.

Rem : Bézout + factoriel $\Rightarrow$ principal

Théorème (Gauss) : Si a est premier avec b et divise bc alors a divise c.

2 - L'héritage de la factorialité. RDO

Déf : On appelle anneau factoriel tout anneau intègre qui vérifie :
(E) $\forall a \in A$, $\exists u \in A^\times$, $\exists p_1, \dots, p_r$ irréductibles tq $a = u p_1 \cdots p_r$
(U) Cette écriture est unique à permutation des facteurs près.

Rem : Un anneau noethérien vérifie (E).

Déf : Un élément premier est un élément p tel que $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$.

Proposition : Dans un anneau factoriel premier $\Leftrightarrow$ irréductible.

3 - Anneaux euclidiens.

Déf : c'est un anneau principal pour lequel il existe un stathme.

calcul pgcd [CL].

4 - Application dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

III - APPLICATIONS

1- En Algèbre linéaire. Grifone, Gourdon, Ramis

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E.

Def : On appelle polynôme minimal de u l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$. On l'appelle π_u

Def : On appelle polynôme minimal de u en $x \in E$ lorsque générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}$. On l'appelle $\pi_{u,x}$

Proposition : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$

Application : Invariants de similitude.

Application : Endomorphismes semi-simples.

2- L'anneau des entiers de Gauss et le théorème des deux carrés. Perrin, DL

Def : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Prop : $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre dont les inversibles sont $\{\pm 1, \pm i\}$, c'est les éléments de norme 1 où $N(a+ib) = a^2 + b^2$.

Prop : $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour le stathme N.

Prop : Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier, on a :
p est somme de deux carrés $\Leftrightarrow$ p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$

Théorème (deux carrés). Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. n est somme de deux carrés ssi $v_p(n)$ est pair pour $p \equiv 3\ [4]$.

Théorème : Les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont aux inversibles près :
(i) les nombres premiers $p \in \mathbb{N}$ avec $p \equiv 3\ [4]$
(ii) les $a+ib$ tels que $a^2 + b^2 = p$ est un nb premier
Dans ce cas, on a $p = 2$ ou $p \equiv 1\ [4]$.

Leçon 123

Corps finis. Applications.

123 Corps finis. Applications

I. INTRODUCTION

Théorème (Wedderburn) Toute algèbre à division de cardinal fini est commutative

Théorème p est premier si et seulement si $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, noté $\mathbb{F}_p$

Application (théorème de Wilson) p premier ssi $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$.

II. STRUCTURE DES CORPS FINIS

1. Classification

Déf : (caractéristique d'un anneau) C'est l'ordre de 1 pour +

Prop. Un corps fini est de caractéristique p première.

Corollaire : Un corps fini K peut être muni d'une structure de $\mathbb{F}_p$-ev. Donc $|K| = p^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prop (Frobénius) Un corps de caract. $p > 0$. Alors $F : x \mapsto x^p$ est un homomorphisme de corps [Perrin]

Corollaire (petit théorème de Fermat) $a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

Théorème Si p premier et $n \geq 1$, il existe à isomorphisme près un unique corps à $q = p^n$ éléments, noté $\mathbb{F}_q$.

Rem : On peut le réaliser comme le corps de décomposition du polynôme $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$.

[Gozard] APRÈS

Ex : $\mathbb{F}_9 \simeq \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(X^2+X-1)}$ **Rem** $\mathbb{F}_q \cong \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ où π irr. dans $\mathbb{F}_p[X]$

2. Les inversibles de $\mathbb{F}_q$ [(Perrin) Gozard]

Théorème : L'ensemble des inversibles $\mathbb{F}_q^\times$ de $\mathbb{F}_q$ est un groupe cyclique (isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}}$).

Rem : Tout sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique

Proposition : Si ξ est un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$, alors $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\xi) = \mathbb{F}_p[\xi]$

Théorème (élément primitif) Soient K un corps fini et L une extension de degré fini de K. Alors L est monogène $L = K(\xi)$ pour un certain $\xi \in L$.

3. Automorphismes de $\mathbb{F}_q$

Théorème : Le groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_q$ est cyclique, d'ordre n engendré par l'automorphisme de Frobénius.

Corollaire : $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) = \langle \mathrm{Frob} \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4. Sous-corps des corps finis

Théorème : Les sous-corps de $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^n$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^{n'}}$ avec $n' \mid n$ (à isomorphisme près).

III - POLYNÔMES SUR LES CORPS FINIS

1- Clôture algébrique

Prop: Un corps fini n'est jamais algébriquement clos:
$\prod_{a \in K}(X-a)+1 \in K[X]$ n'admet aucune racine dans K.

Lemme: La clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$ coïncide avec celle de $\mathbb{F}_p$.

Théorème: Une clôture algébrique commune à tous les corps finis est $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{i!}}$.

2- Polynômes irréductibles sur les corps finis

(Gauss) **Prop:** Il existe des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$

Prop: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $A(n,q)$ le nombre de polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q$. Alors:
$$\#A(n,q) \sim \frac{q^n}{n}.$$
En particulier, il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_q$.

(Perron) **Théorème** (réduction): Soit $Q = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ et p premier. Si $\overline{Q} = \sum \overline{a_i} X^i$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ et $\deg Q = \deg \overline{Q}$ alors Q est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Ex: $P = 3X^3 + 7X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Théorème: Soit $P \in k[X]$ de degré $n > 0$. P est irréductible sur k si et seulement si P n'a pas de racines dans les extensions L/K t.q. $[L:K] \leq \frac{n}{2}$.

Exemples et contre-exemples [Perrin].

3- Équations polynômiales

Théorème (Chevalley-Warning)

+ corollaires

IV - ARITHMÉTIQUE ET CORPS FINIS

1- Critères de primalité [FGN A1 1 p. 115]

Soient a et p des entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Théorème: On suppose que pour tout diviseur d de $p-1$ autre que $p-1$, l'entier $a^d - 1$ est premier avec p. Alors p est premier.

Théorème: On écrit $p-1 = rs$ avec $r \geq s$. On suppose que pour tout diviseur t de r autre que 1, $a^{\frac{p-1}{t}} - 1$ est premier avec p. Alors p est premier.

2. Carrés dans les corps finis

Prop : . Si $p=2$, tous les éléments sont des carrés.
. Si p impair, $\mathbb{F}_q^\times \to \{\pm 1\}$, $x \mapsto x^{(q-1)/2}$ est surjectif et son noyau est composé de tous les carrés de $\mathbb{F}_q^\times$. Alors $|\mathbb{F}_q^{\times 2}| = \frac{q+1}{2}$ et $|\mathbb{F}_q^{\times 2}| = \frac{q-1}{2}$.

Mémento mais Perrin peut être mieux Gozard aussi

Def : Soit p impair et $x \in \mathbb{F}_p^\times$. On appelle symbole de Legendre de x noté $\left(\frac{x}{p}\right)$ l'entier $x^{(p-1)/2} = \pm 1$
On décide $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$ et si $b \in \mathbb{Z}$ a pour classe $x \in \mathbb{F}_p$, $\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)$

Def : Si la classe de b dans $\mathbb{F}_p$ est un carré de $\mathbb{F}_p^\times$, on dit que b est un résidu quadratique modulo p.

Prop : -1 est un résidu quadratique modulo p ssi $p \equiv 1 [4]$

App : Il existe une infinité de nb premiers de la forme $4m+1$

Théorème (loi de réciprocité quadratique) : Soient p et q deux premiers impairs distincts. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$

Exemple : $\left(\frac{23}{59}\right) = -1$

Application : Le nombre de Fermat $F_n = 2^{(2^n)}+1$ est premier ssi $3^{(F_n-1)/2} + 1 \equiv 0 [F_n]$

+ des trucs dans [Gourdon]

V - ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE SUR LES CORPS FINIS

Prop On a :
(1) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$
(2) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}$

+ nombre de matrices diagonalisables dans $\mathbb{F}_q$
+ nombre de matrices de rang r.

Formes quadratiques

Lemme : L'équation en x,y, $ax^2+by^2=1$ avec $a,b \in \mathbb{F}_q^\times$ a des solutions dans $\mathbb{F}_q$.

Théorème : Pour p impair, soit E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dim. n. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times \setminus \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées sur E de matrices : $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$

La forme Q est de l'une ou l'autre type suivant que son discriminant est ou non un carré de $\mathbb{F}_q^\times$.

Leçon 125

Extensions de corps. Exemples et applications.

C'est bizarre mais en fait j'aime bien cette leçon. Malheureusement je ne suis pas capable de parler de théorie de Galois alors le plan contient juste ce qu'il faut. Je crois qu'à partir de Gozard, *Théorie de Galois*, on peut en présenter une version « dégradée »comme ils disent en parlant juste du groupe de Galois des extensions monogènes.

125 Extensions de corps - Exemples et Applications

I- EXTENSIONS DE CORPS

1- Définitions

Déf : Soient K et L deux corps. On appelle homomorphisme de corps un homomorphisme d'anneaux $K \to L$ entre K et L.

Prop° : Un homomorphisme de corps est injectif.

Déf : Lorsqu'il existe un homomorphisme de corps $\varphi : K \to L$, on dit que L est une extension de K. On note L/K et on identifie K et son image $\varphi(K)$.

Exemples : $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $K(X)/K$, tout corps est une extension de son corps premier

Déf : Lorsqu'il existe un corps $K \subset L \subset E$ on dit que L est une extension intermédiaire de E/K.

Proposition : Si L/K est une extension de corps, alors L peut être muni d'une structure de K-espace vectoriel

Déf° : On dit que L/K est finie si L est un K-espace vectoriel de dimension finie. Elle est infinie sinon. On note $[L:K] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ cette dimension et on l'appelle degré de l'extension.

Théorème (base télescopique) : Soient $K \subset L \subset M$ des corps. On note $(e_i)_{i \in I}$ une base de L/K et $(f_j)_{j \in J}$ une base de M/L. Alors $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de M/K.

Corollaire : Dans cette situation, $[M:K] = [M:L][L:K]$.

2- Quelques exemples

Exemple : $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est une extension de degré 2.

Exemple : $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est une extension de degré infini.

Lemme : $[L:K] = 1$ ssi $L \cong K$.

Théorème : Soit K un corps et f un polynôme de $K[X]$ de degré n. Alors :
i) L'anneau $K[X]/(f)$ est un K-espace vectoriel de dim n
ii) Si f est irréductible $K[X]/(f)$ est un corps qui est une extension de degré n de K.

Déf : Soit L un corps et H un sous-groupe de $Aut(L)$. On note $L^H = \{x \in L, \forall \sigma \in H, \sigma(x) = x\}$.

Lemme (Artin) : L/L^H est une extension finie de degré $|H|$.

Déf : Soit L/K une extension et S un sous-ensemble de L. On appelle $K(S)$ le plus petit sous-corps de L qui contient à la fois K et S.

Prop : On a $K \subset K(S) \subset L$

Def : Lorsque S est fini on dit que $K(S)$ est une extension de type fini. Lorsque S est un singleton $\{\alpha\}$ alors on dit que $K(\alpha)$ est une extension monogène de K.

Prop : monogène $\Rightarrow$ type fini $\Rightarrow$ extension finie.

Exemple : $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ dans $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2},\ a,b \in \mathbb{Q}\}$.

Prop : Si S et T sont des sous-ensembles de L/K alors $K(S \cup T) = K(S)(T)$

II. ALGÉBRICITÉ ET TRANSCENDANCE

1. Def

Prop : Soient L/K une extension et $a \in L$. L'application
$\psi : \left| \begin{array}{ccc} K[X] & \to & K(a) \\ g & \mapsto & g(a) \end{array} \right.$ est un homomorphisme d'anneaux.

Def :
- Si ψ est injectif, a est dit transcendant
- Sinon $\ker \psi = (\Pi_a)$ où $\Pi_a \in K[X]$ unitaire est le polynôme minimal de a qui est alors dit algébrique. Il est de degré dans Π_a.

Exemples :
- $a \in K \iff a$ est algébrique de degré 1.
- $\sqrt{2}$ et i sont algébriques de degré 2 sur $\mathbb{Q}$

Def : L/K est dite algébrique lorsque tous les éléments de L sont algébriques sur K.

Prop : Si a est algébrique, Π_a est irréductible

Théorème : Il y a équivalence entre : [Perrin] – [Gozard] –
(i) a est algébrique sur K
(ii) $K[\alpha] = K(\alpha)$
(iii) $\dim_K K[\alpha] < +\infty$.

Corollaire : Toute extension finie est algébrique.

Proposition : Si a est algébrique de degré n sur K, alors $1, a, \dots, a^{n-1}$ est une base de $K(\alpha)$

Corollaire : La somme et le produit d'éléments algébriques est algébrique.

Théorème : $\mathcal{A}(L/K) = \{a \in L,\ a$ est algébrique sur $K\}$ est un sous-corps de L qui contient K.

2. Un exemple et un contre-exemple.

Théorème : Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a une racine dans $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est alg. clos

Théorème :
- Si $L/\mathbb{C}$ est une extension algébrique alors $L = \mathbb{C}$
- Si $L/\mathbb{R}$ est une extension algébrique alors $L = \mathbb{R}$ ou $L = \mathbb{C}$.

Contre-exemple : $A = \mathcal{A}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})/\mathbb{Q}$ est une extension algébrique mais pas finie.

Théorème : A est algébriquement clos et dénombrable.

Corollaire : Il existe dans $\mathbb{R}$ des nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Théorème (Hermite–Lindemann) : e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

III - EXTENSIONS DE CORPS ET POLYNÔMES

1. Corps de rupture

Def : Soit K un corps et soit $f \in K[X]$ un polynôme irréductible dans $K[X]$. L/K est un corps de rupture de f ssi $L = K(\alpha)$ avec $f(\alpha) = 0$.

Théorème : Il existe un corps de rupture de P irr sur K, unique à isomorphisme près.

Exemple : $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est le corps de rupture de $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$

2. Corps de décomposition

Def : Soit K un corps et L/K une extension. Soit $P \in K[X]$ avec $\deg P = n \in \mathbb{N}^*$. L est un corps de décomposition de P sur K lorsque :

(i) $\exists a \in L$, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ tels que dans $L[X]$, $P(X) = a \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$

(ii) $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Théorème : Pour tout $P \in K[X]$, il existe un corps de décomposition de P sur K, unique à isomorphisme près.

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^2 - 2$

3. Clôture algébrique

Def : une extension $\bar{K}/K$ est une clôture algébrique de K lorsque $\bar{K}$ est alg. clos et $\bar{K}$ est alg. sur K.

Théorème (Steinitz) : Il existe une unique clôture algébrique

Ex : $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

IV - QUELQUES APPLICATIONS

1. Les corps finis

Théorème : Le cardinal d'un corps fini est une puissance d'un nombre premier. Si p est premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ est un corps à p éléments.

Théorème : Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^n$.

1) Il existe un corps fini à q éléments, c'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$

2) Ce corps est unique à isomorphisme près, il est noté $\mathbb{F}_q$.

Théorème : Il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_q$ et leur nombre est équivalent à $\frac{q^n}{n}$ quand le degré $n \to +\infty$.

2. Constructibilité

Def : Un point de $\mathbb{R}^2$ est constructible (à la règle et au compas) lorsque partant de $(0,0)$ et $(0,1)$ on peut le réaliser comme intersections de droites et cercles.

Théorème (Wantzel) : Un nombre x est constructible (c'est à dire $(0,x)$ est constructible) ssi il appartient à une tour d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$.

Def : Un polygône régulier à n côté est constructible lorsque l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible i.e. $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est constructible.

Théorème (Gauß-Wantzel) : Les polygônes réguliers constructibles sont ceux dont le nombre de côtés n est de la forme 2^α avec $\alpha \geq 2$ ou de la forme $2^\alpha p_1 p_2 \cdots p_r$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat (i.e. de la forme $2^{2^m}+1$).

Leçon 142

Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Oula je l'aime pas celle là. À noter qu'il y a une application exploitable du théorème de structure des polynômes symétriques dans *Oraux X-ENS, Algèbre 1*, numéro 5.23.

J'ai majoritairement recopié ce qu'on trouve dans le *Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 1* de Ramis, Deschamps, Odoux et ajoutant quelques trucs sur les polynômes symétriques que l'on trouve dans l'*Invitation à l'Algèbre* de Jeanneret, Lines.

142 - Algèbre de polynômes à plusieurs indéterminées. Exemples et applications

I - ALGEBRE DE POLYNÔMES À n INDÉTERMINÉES

1 - Construction(s)

Def : Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle polynôme à n indéterminées sur A toute famille d'éléments de A indexées par $\mathbb{N}^n$.

Notation On note $A[X_1, \dots, X_n]$ cet ensemble.

Théorème $(A[X_1, \dots, X_n], +, \times, \cdot)$ est une A-algèbre munie des opérations suivantes : si $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$, $Q \in (b_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$, $c \in A$

$P + Q = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$; $PQ = \left(\sum_{k+l=i} a_k b_l \right)_{i \in \mathbb{N}^n}$, $cP = (ca_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$.

Proposition $j : A \longrightarrow A[X_1, \dots, X_n]$, $a \longmapsto (a_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$ où $\begin{cases} a_{0,\dots,0} = a \\ a_i = 0 \text{ si } i \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$ est un morphisme injectif d'algèbre.

Définition On appelle j-ème indéterminée le polynôme $X_j = \left(\delta_{i,(0,\dots,0,\underset{\uparrow j}{1},0,\dots,0)} \right)_{i \in \mathbb{N}^n}$

Théorème Les $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont des générateurs de la A-algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$.

Tout polynôme s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire des $(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n}$ $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^n}$ s'écrit $P = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$

Théorème Il existe un isomorphisme $A[X_1, \dots, X_{n-1}, X_n] \cong A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$

2 - Structure de $A[X_1, \dots, X_n]$ [Perrin, RDO]

Théorème Si A est intègre, alors $A[X]$ est intègre et $A[X]^\times = A^\times$

Proposition $A[X]$ est principal $\Leftrightarrow$ A est un corps.

Corollaire $A[X, Y]$ n'est jamais principal

Théorème (transfert) Si A est factoriel alors $A[X]$ factoriel.

Théorème (Hilbert) Si A est noethérien, alors $A[X]$ est noethérien

3 - Degrés, polynômes homogènes

Def (degré partiel) Le degré partiel de $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ relativement à X_q est le degré de P considéré comme élément de $A[X_1, \dots, X_{q-1}, X_{q+1}, \dots, X_n][X_q]$. On note $\deg_{X_q}(P)$

Proposition : $\deg_{X_q}(P+Q) \leq \sup(\deg_{X_q}(P), \deg_{X_q}(Q))$

$\deg_{X_q}(PQ) \leq \deg_{X_q}(P) + \deg_{X_q}(Q)$ (égalité si A intègre)

Def (degré total) Si $P = 0$, on convient $\deg(P) = -\infty$, sinon $\deg P$ est le plus grand élément de $\{k \in \mathbb{N}, \exists i \in \mathbb{N}^n, (a_i \neq 0) \wedge (|i| = k)\}$

Proposition : $\deg(P+Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q)$

$\deg(PQ) \leq \deg(P) + \deg(Q)$ (égalité si A intègre)

Def (Polynôme homogène) $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est dit p-homogène lorsque $[|i| \neq p \Rightarrow a_i = 0]$.

Prop : Deux polynômes sont p et q-homogènes, leur produit est $(p+q)$-homogène

II - ARITHMÉTIQUE ET CALCUL ABSTRAIT dans $A[X_1, \dots, X_n]$

1. Arithmétique. K un corps.

Rem : Pour $n \geq 2$, $K[X_1, \dots, X_n]$ n'est pas euclidien.

Déf : La notion de divisibilité dans $K[X_1, \dots, X_n]$ est celle héritée du caractère intègre de K. On a des divisions euclidiennes "partielles".

App : $X_n - B \mid A$ ($B \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$) ssi le polynôme obtenu en substituant dans A le polynôme B à l'indéterminé X_n est nul

Corollaire : $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) \mid A \iff \forall 1 \leq i < j \leq n,\ (X_i - X_j) \mid A$.

Prop° : On a l'existence d'une décomposition en irréductibles, d'un PGCD, d'un PPCM. Le théorème de Gauss est vrai mais pas celui de Bézout.

2. Dérivation symbolique et applications

Déf : Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$. Le polynôme dérivé partiel de P par rapport à l'indéterminé X_q et noté $\frac{\partial P}{\partial X_q}$ ou P'_{X_q} est le polynôme dérivé de $P \in A[X_1, \dots, X_{q-1}, X_{q+1}, \dots, X_n][X_q]$.

Théorème (Euler) : Il y a équivalence entre : [K corps de carac. 0]

(i) P est p-homogène (ii) $\sum_{q=1}^{n} X_q \frac{\partial P}{\partial X_q} = pP$

Théorème (Formule de Taylor) : Dans $K(X_1, \dots, X_n)[Y_1, \dots, Y_n]$ où K corps de carac. 0,

on a égalité : $P(X_1+Y_1, \dots, X_n+Y_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{|i|=k} \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!} Y_1^{i_1} \cdots Y_n^{i_n} \frac{\partial^k}{\partial X_1^{i_1} \cdots \partial X_n^{i_n}}(P)$

La somme sur k est finie.

III - FONCTIONS POLYNÔME

Déf : Soit B une A-Algèbre, on définit le morphisme d'évaluation :

ev : $A[X_1, \dots, X_n] \to \mathcal{F}(B^n, B)$, $P \mapsto \left((x_1, \dots, x_n) \mapsto P(x_1, \dots, x_n)\right)$

où $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.

Prop : ev est un morphisme de A-algèbre.

Prop : Si A est intègre infini, ev est injectif.

Contre-exemple : Si $A = B = \mathbb{F}_p$ ev$(X_1^p - X_1)$ est la fonction nulle.

Prop : Si A est intègre infini $\{x \in A^n,\ P(x) \neq 0\}$ est infini

Théorème : Soit A intègre infini.



2. Fonction polynôme sur les corps finis

Théorème (Chevalley-Warning) Soient $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes de $\mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_r]$.
Si $\sum_{i\in I} \deg P_i < r$ alors $\operatorname{card}\{x\in\mathbb{F}_q^r, \forall i\in I,\ P_i(x)=0\} \equiv 0 \ [p]$.

Corollaire : (Erdös-Ginzburg-Ziv) Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $a_1, \dots, a_{2n-1}$ sont des entiers naturels non nuls, on peut en trouver n dont la somme est divisible par n.

Corollaire : Toute forme quadratique ci au moins 3 variables sur $\mathbb{F}_q$ admet un zéro non trivial.

3. Classification des quadriques sur $\mathbb{R}$

[Grifone).

IV. POLYNÔMES SYMÉTRIQUES - RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES

Déf : Un polynôme P de $A(X_1, \dots, X_n)$ est symétrique lorsque $\sigma P = P$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ avec $\sigma P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$.

Déf : Dans $A(X_1, \dots, X_n)$ on définit la k-ième fonction symétrique élémentaire par : $\Sigma_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} X_{i_1}\cdots X_{i_k}$
Ce sont des polynômes symétriques.

Théorème (structure) Si A est intègre, tout polynôme symétrique est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires.

Théorème (formules de Newton). On note $S_k = \sum_{i=0}^{n} X_i^k$ et on a :

i) Pour $1\le k\le n$, $S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \Sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^p \Sigma_p S_{k-p} + \dots + (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k\Sigma_k = 0$.

ii) Pour $k\ge n$, $S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^n \Sigma_n S_{k-n} = 0$.

[RDO, JL, Gourdon]

Leçon 150

Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cette leçon est super, elle contient toutes les leçons d'algèbre linéaire et bilinéaire. En plus elle est à recopier intégralement dans le H2G2. Sur le groupe symplectique à la fin, j'ai vite abandonné l'idée de ce paragraphe mais initialement, j'avais prévu de le recopier dans le *Linear Algebra* de P. D. Lax (deuxième édition !).

150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

I- ACTION PAR TRANSLATION

1. Description théorique

Déf: L'action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par translation à gauche est définie par $GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(P, A) \mapsto PA$.

Déf (Opérations élémentaires). On définit les matrices de $GL_m(\mathbb{K})$:

dilatation $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$; transvection $i \neq j \in [\![1,m]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$: $T_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij}$; permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$: $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$.

Prop. Ces matrices engendrent $GL_m(\mathbb{K})$.

Prop. Voici une description de l'action par translation à gauche des matrices d'opérations élémentaires sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

$D_i(\alpha)\,A$	$T_{ij}(\lambda)\,A$	$P_{ij}\,A$
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

où L_i désigne la $i$ème ligne de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Déf: On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche.
Une matrice est dite échelonnée réduite en ligne lorsque :
- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.
- tous les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Théorème. Le noyau est un invariant complet pour l'action par translation à gauche : si $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a $Orb(A) = Orb(A') \Leftrightarrow \ker A = \ker A'$.

Théorème. Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite.

2. Aspects algorithmiques et conséquences pratiques

Rem: On obtient la matrice échelonnée réduite par des opérations élémentaires : c'est l'algorithme du pivot de Gauss.

Théorème (cas des matrices carrés). Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ il existe une matrice inversible P telle que PA soit triangulaire supérieure.

Application : Résolution des systèmes linéaires.

Application : Calcul du rang

Application : Calcul pratique du déterminant.

Application (factorisation LU). Soit A une matrice carrée dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe une unique couple (L,U) où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U est triangulaire supérieure tel que $A = LU$.

Prop: L'algorithme du pivot de Gauss a une complexité $O(n^3)$. Pour une matrice tridiagonale, avec la méthode LU, on peut résoudre le système en $O(n)$ opérations.

Application (décomposition de Bruhat). Le groupe $T_S \times T_S^+$ des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathbb{K}^n$ agit transitivement sur $GL_n(\mathbb{K})$ (produit) et $GL_n(\mathbb{K}) = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_S P_\sigma T_S$ (P_σ matrice de permutation).

II. ACTIONS PAR ÉQUIVALENCE ET CONJUGAISON

1. Action par équivalence

Déf : $GL_m(K) \times GL_n(K)$ agit par équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$:

$$(GL_m(K) \times GL_n(K)) \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \to \mathcal{M}_{m,n}(K), \quad ((P,Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$$

Prop : Le rang est un invariant complet pour cette action :

$$\mathcal{O}rb(A) = \mathcal{O}rb(A') \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$$

Prop°. Un système de représentants des orbites est donné par les matrices :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prop : Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r de taille $m \times n$ à coefficients dans K. Alors :

$$\overline{\mathcal{O}_r} = \bigcup_{0 \le k \le r} \mathcal{O}_k.$$

Corollaire : Le rang est semi-continu inférieurement.

Application : Si K est un corps fini, le nombre de matrices de tailles $m \times n$ de rang r est :

$$|\mathcal{O}_r| = \ldots$$

2. Action par conjugaison et application à la réduction

Déf : $GL_n(K)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(K)$: $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$

Rem : Deux matrices sont semblables ssi elles sont dans la même orbite.

Prop : Le spectre est un invariant total pour l'action par conjugaison sur les matrices diagonalisables.

Contre exemple : Le polynôme minimal est un invariant qui n'est pas total : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition : Une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si son orbite sous $GL_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Rem : dans le cas réel, $\mathcal{O}_A$ fermé $\iff$ A semi-simple.

Proposition : Sur un corps fini, on peut dénombrer les matrices diagonalisables :

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{n_1 + \cdots + n_q = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}.$$

Théorème (admis) : Le tableau de Young d'une matrice nilpotente A est la donnée des sauts de dimension : $\lambda_i = \dim \operatorname{Ker} A^i - \dim \operatorname{Ker} A^{i-1}$ $(i \in \mathbb{N}^*)$. C'est un invariant complet pour l'action par conjugaison sur les matrices nilpotentes.

Application (théorème de Jordan dans le cas général) : Une matrice trigonalisable est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $(\lambda_i I_{d_i} + J_{d_i, r_i})$. Cette décomposition est unique.

Application : M et $2M$ sont semblables (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) ssi M est nilpotente

Théorème : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et u l'endomorphisme associé ($u \in \mathcal{L}(E)$). Il existe une unique famille $P_1, \ldots, P_r$ de polynômes unitaires et une famille $E_1, \ldots, E_r$ de sous-espaces de E vérifiant :

(i) $P_r | \cdots | P_1$ (ii) $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ (iii) E_i stable par u et $u|_{E_i}$ cyclique de polynôme P_i

Les P_i sont appelés invariants de similitude de u.

Prop : Les invariants de similitude sont des invariants complets pour l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

App : (réduction de Frobenius) : M est semblable à $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ C_{P_i} matrice compagnon

App : M et ${}^tM$ sont semblables.

III - ACTION PAR CONGRUENCE

1. Sylvester

Déf : $GL_n(\mathbb{K})$ agit par congruence sur l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ de taille n : $(P, A) \mapsto PA^tP$

Prop : Deux matrices sont congruentes ssi elles sont les matrices de la même forme quadratique dans des bases différentes

Théorème : (description des invariants) : Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $Orb(A) = Orb(A') \iff rgA = rgA'$
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Orb(A) = Orb(A') \iff rgA = rgA'$ et signatures égales
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, q impair, $Orb(A) = Orb(A') \iff \delta(A) = \delta(A')$ ↑ lorsque A et A' sont inversibles.

Théorème (Sylvester)

Application : classification des coniques et quadriques réelles.

2- Stabilisateurs

Déf (groupe orthogonal réel) $O(n) = Stab(I_n) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P^tP = I_n\}$

Déf : Le groupe des isométries de la forme quadratique standard de signature (p,q) est $O(p,q) = Stab(I_{p,q}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P I_{p,q} {}^tP = I_{p,q}\}$

Théorème : Il existe un homéomorphisme $O(p,q) = O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Théorème : Soit G un groupe compact de $GL(E)$ (E ev. $\mathbb{R}$ de dim n). Il existe un produit scalaire euclidien $\langle , \rangle$ sur E de forme quadratique q telle que $G \subset O(q) = Stab(S)$.
De façon équivalente, on cherche $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $G \subset Stab(S)$

3. Action sur $\mathcal{A}_n$ et groupe symplectique

Leçon 151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

C'est chouette comme leçon, on peut mettre beaucoup de choses, y compris difficiles. Attention néanmoins au début qui est plus délicat qu'on ne le croit : c'est fait très proprement dans le *Cours de Mathématiques Spéciales, tome 1* de Ramis, Deschamps, Odoux, c'est ce que j'ai essayé de résumer au début de la leçon.

151. Dimension d'un espace vectoriel (dim. finie). Rang. Exemples et applications

E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

I/ GÉNÉRALITÉS SUR LA NOTION DE DIMENSION [RDO1]

1) Familles libres, génératrices et bases

Déf * Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est dite
- génératrice lorsque $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = E$ i.e. $\forall x\in E, \exists \alpha\in\mathbb{K}^{(I)}$, $x=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$
- libre lorsque $\forall \alpha\in\mathbb{K}^{(I)}, \left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow \left(\forall i\in I, \alpha_i = 0\right)$

* C'est une base lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice

$\forall x\in E, \exists! \alpha\in\mathbb{K}^{(I)}, x=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$.

Propriétés : ✍ Toute sous-famille d'une famille libre est libre
* Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice

Théorème : $e=(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Il y a équivalence :
(i) e est une base
(ii) e est une famille génératrice minimale
(iii) e est une famille libre maximale

2) La dimension finie

Déf° : E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Désormais E est de df

Théorème : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de card n. Alors si $\mathcal{L}$ est une famille libre, elle est de cardinal $\leq n$.

Corollaire : Les bases d'un ev de df sont de cardinal fini

Théorème (base incomplète). Soit E un ev de df.
- De toute famille génératrice, on peut extraire une base
- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice, on peut "compléter" $\mathcal{L}$ en une base en n'utilisant que des éléments de $\mathcal{G}$.

Corollaire : Tout ev de dim finie admet une base (finie par corollaire)

Théorème/Définition : Toutes les bases ont même cardinal, appelé dimension de E.

Théorème : base $\Leftrightarrow$ libre à n éléments $\Leftrightarrow$ générateur à n éléments.

Exemples : $\mathbb{R}^n$ de dim. n. $\mathbb{K}_n[X]$ de dim $n+1$.

Exemple : Sur $\mathbb{K}^n$, on définit la base canonique $e_i = (0\ \cdots\ 0\ \overset{i}{1}\ 0\ \cdots\ 0)$

Remarque : influence du corps de base ?

Exemple : Si $E_1, \dots, E_k$ sont des $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n_1, \dots, n_k$. Alors $E_1\times\cdots\times E_k$ admet $n_1+\cdots+n_k$ pour dimension.

3) Sous-espaces d'un ev de dim finie

Théorème : Soit E un ev de dim n et soit F un sev de F. Alors F est de dim finie $p\leq n$ avec égalité ssi $F=E$.

Exemple/définition : . Une droite est un sev de dim 1.
. Un hyperplan est un sev de dim $n-1$.

Théorème ~~$\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim E$~~

Théorème $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$

4) Dimension et applications linéaires (épisode 1)

Théorème Si E et F sont des K-ev de dim respectives n et p alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-ev de dimension np.

Proposition : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et E' un sev de E de dim finie n' Alors $u(E')$ est un sev de F de dim finie $\leq n'$.

Théorème : Deux espaces vectoriels de dim finies sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

5) Dualité et dimension

REPRENDRE LA LEÇON DUALITÉ EN INSISTANT SUR $E \simeq E^*$.

bases duales, antéduales

II. NOTION DE RANG D'UNE FAMILLE, D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

[RDO], [Grifone]

1) Def

Définition : Le rang d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\in I}$ (si celle ci est finie) C'est le cardinal maximum d'une sous-famille libre de x.

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Le rang u est la dimension de $\mathrm{Im}\, u$ (si celle ci est finie). On note $\mathrm{rg}\, u$.

Matrice : rg de l'app lin associée

Théorème : Soient E, F des ev de même dimension finie n Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre :

u injective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ u bijective $\Leftrightarrow$ u de rang n.

2) Propriétés du rang

Proposition : Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des app. lin entre des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Alors :

- $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\, u, \mathrm{rg}\, v)$
- Si u bijectif : $\mathrm{rg}(v\circ u) = \mathrm{rg}\, v$ et si v bijectif, $\mathrm{rg}(v\circ u) = \mathrm{rg}\, u$.

Application : $E', E'' \subset E$ $\dim(E' \cap E'') + \dim(E' + E'') = \dim E' + \dim E''$

Théorème (du rang) : $\dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\, u = \dim E$ — EN PREMIER + CAS GÉNÉRAL

Proposition : Le rang est semi-continu inférieurement.

Théorème : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang : Elles sont alors semblables à J_r.

Théorème : Ce rang est indépendant du corps de base (preuve après)

3) Calcul pratique du rang et applications, systèmes linéaires

Proposition : Le rang est l'ordre maximal des mineurs non nuls ex tracks de la matrice.

All : $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$.

Calcul par l'algorithme de Gauss en $\mathcal{O}(n^3)$ opérations.

III - RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE SUR LA DIMENSION

1) La réduction des endomorphismes

PLEIN D'EXEMPLES DONT INVARIANTS DE SIMILITUDE.

2) Le théorème de Krein-Milman

AUSSI CARATHÉODORY SI PAS DIT AVANT ?

+ ~~ESPACES EUCLIDIENS ?~~ 3) SIMPLEXES + Cayley-Menger.

IV / DES CORPS - [Ou], [Carrega], ...

Proposition : Une extension L/K munit L d'une structure de K-ev.

Définition : Si L est de dim finie en tant que K-ev, l'extension est dite finie de degré $[L:K] := \dim_K L$.

Théorème (base télescopique) : Soient $K \subset L \subset M$. M/K est finie ssi M/L et K/L le sont et $[M:K] = [M:L][L:K]$.
+ on a une base.

Proposition : a est algébrique sur $K \iff [K(a):K] < \infty$ et le degré de $K(a)/K$ est le degré du polynôme minimal $\Pi_{a,K}$.

Théorème (élément primitif) ? bof

Exemple : Polynôme cyclotomique : c'est le polynôme f_n de $\omega = e^{2i\pi/n}$ sur $\mathbb{Q}$ et $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = \deg \Phi_n = \varphi(n)$.

Application : Problème de constructibilité.

LEMME D'ARTIN ? oui

V / DE L'ANALYSE ET DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

EQUA DIFF ? (PEUT ÊTRE AVANT). bof

DÉF SUBMERSION, IMMERSION, RANG CONSTANT ou ↙

DÉF SOUS-VARIÉTÉS ...

THM EXTREMA LIÉS ?

COMPACTS = FERMÉS BORNÉS, RIESZ ou

[Rouvière], [Lafontaine], [BG], [GT2] sûrement.

Leçon 152

Déterminant. Exemples et applications.

Pour les analystes, je crois qu'on peut faire toute la leçon en voyant le déterminant comme un volume et laisser le résultant ou le déterminant sur un anneau pour les gens plus intelligents. En particulier le jury spécifie :

« *L'interprétation du déterminant comme volume est essentiellle* »

C'est drôle parce qu'en fait, il me semble que c'est quand même assez subtil : si on voit le volume comme la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$ et que l'on définit le déterminant comme on le fait à l'école, l'interprétation en tant que volume provient du théorème de changement de variable (linéaire) qui soulève des questions de théorie de la mesure élémentaires mais peu abordées à l'agrégation. On trouve bien sûr la preuve dans n'importe quel livre de théorie de la mesure ou d'intégration (par exemple celui de Briane, Pagès ou dans le *Calcul Intégral* de Candelpergher) : pêle-mêle on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, une décomposition polaire, la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue...

Ensuite les analystes peuvent parler du théorème de changement de variable dans toute sa généralité (c'est *juste* le théorème linéaire et un développement de Taylor) ce qui permet de parler de trucs amusants comme l'équation variationnelle du flot, le théorème de transport, les systèmes à divergence nulle...

À noter que le *Linear Algebra* de P. D. Lax propose une construction assez différente du déterminant (basée sur le volume justement) mais je n'ai pas trop regardé alors je ne sais pas si c'est pertinent ici.

152 - Déterminant. Exemples et applications

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

I - UNE DÉFINITION DU DÉTERMINANT. PROPRIÉTÉS

1 - Formes n-linéaires sur E, déterminant d'une famille de vecteurs

Déf : Une forme f n-linéaire sur E est dite :
(i) antisymétrique lorsque $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$
(ii) alternée lorsque $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $[\exists i \neq j, x_i = x_j] \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Prop : Soit f une forme n-linéaire sur E. f alternée $\Rightarrow f$ antisymétrique.
Si f est antisymétrique et car $\mathbb{K} \neq 2$, alors f est alternée.

Thm : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ~~est existe~~ une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}}$ prenant la valeur 1 en $(e_1, \dots, e_n)$.
Si $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i \in E$, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}$.

Prop : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème : Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Il y a équivalence entre :
(i) $(x_1, \dots, x_n)$ liée (ii) Pour toute base $\mathcal{B}$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
(iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

2 - Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det(f)$

Déf : Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le déterminant de M,
$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$$

Rem : Cette formule reste valable dans un anneau A. Alors $\det M \in A$.

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique noté χ_A le polynôme de degré n : $\chi_A = \det(A - X I_n)$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\det A = ad - bc$ et $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$

Ex : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. $\det A = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$.

Théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $\det A = \det f$.

Prop : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a :
(i) $\det A = \det {}^tA$ (ii) $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes. (resp. en les lignes)
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. (iv) $\det AB = \det A \det B$ et $\det(f \circ g) = \det f \det g$.

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ et $\det f \neq 0 \Leftrightarrow f \in GL(E)$
Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Rem : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on appelle mineur (i,j) de A le déterminant Δ_{ij} de la matrice $(a_{k\ell})_{\substack{k \neq i \\ \ell \neq j}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
On appelle cofacteur noté $\mathrm{cof} A_{ij}$ le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
$\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathrm{cof} A_{ij}$
$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{cof} A_{ij}$

Déf : On appelle comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice $\mathrm{co}A = (\mathrm{cof}\, A_{ij})_{ij}$

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A\, {}^t\mathrm{co}A = {}^t\mathrm{co}(A)\, A = \det A\, I_n$

3- Formes adaptées au calcul

Prop 24 : Si $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors $\det T = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

Thm : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines de χ_A dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Prop : Si $A_1, \dots, A_k$ sont des matrices carrées, $\begin{vmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \det A_i$

Ex : Si $CD = DC$, alors $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$ (matrices carrées)

4- Exemples.

Prop (Vandermonde) : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$V(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [A nilpotente] $\Leftrightarrow$ [$\forall 1 \le k \le n$, $\mathrm{Tr}\, A^k = 0$]. (lorsque $\mathrm{car}\, \mathbb{K} > n$).

Prop (déterminant circulant). Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $P = \sum a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = P(1)\, P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) \quad \text{où} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Prop (déterminant de Cauchy). Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ avec $\forall i,j \ a_i + b_j \neq 0$. Alors $\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right) = \dfrac{\prod_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$

II - APPLICATIONS EN ALGÈBRE LINÉAIRE

1- Déterminant et rang

Déf : Un mineur d'ordre r de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant d'une matrice de taille r extraite de A en choisissant r lignes et r colonnes.

Prop : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r ssi il existe un mineur d'ordre r non nul et tous les mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls.

Application : $\mathrm{rg}(\mathrm{co}A) = \begin{cases} n & \text{si } \mathrm{rg}\, A = n \\ 1 & \text{si } \mathrm{rg}\, A = n-1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{rg}\, A \le n-2 \end{cases}$

Prop : Soient $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ et $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_r)$ pour une base $\mathcal{B}$ de E. $(x_1, \dots, x_r)$ libre $\Leftrightarrow$ on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul.

Déf : On appelle bordant d'un mineur δ d'ordre r extrait de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout mineur de A d'ordre $r+1$ dont δ est extrait.

Prop. Soient $(x_1, \dots, x_r)$ une famille libre de E, $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_r)$ et $y \in E$. $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r) \Leftrightarrow$.

Théorème (Systèmes de Cramer). $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

III. DÉTERMINANT ET VOLUME DANS $\mathbb{R}^n$.

1- Volumes dans $\mathbb{R}^n$

Déf : Le volume d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est sa mesure de Lebesgue n-dimensionnelle (lorsqu'elle est définie), notée $\lambda_n(A)$

Notation : $\mathcal{BC} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Théorème (Changement de variable linéaire). Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, alors $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\, d\lambda_n(x) = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$.

Application : Le volume du parallélépipède engendré par $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ défini par $P = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \,,\, \lambda_j \in [0,1] \right\}$ est $|\det A|$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(a_1, \dots, a_n)$.

Application : Le volume du simplexe $\left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \,,\, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \right\}$ est $\frac{1}{n!} |\det A|$.

2- Application au déterminant de Cayley-Menger

Déf (déterminant de Cayley-Menger) Soient $(x_0, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. On définit $I^*(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & d_{ij}^2 & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}$ où $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$

(Si les $(d_{ij})_{i,j}$ sont prescrits, on définit de même $I^*(d_{ij})$).

Prop : $\det(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} I^*(x_0, \dots, x_n)$

App (Formule de Héron). Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle T, alors $\mathrm{aire}(T) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Théorème. Soient $(d_{ij})_{i,j}$ des réels tels que $d_{ij} = d_{ji} > 0$ si $i \neq j$ et $d_{ii} = 0$ $\forall i$. Il y a équivalence entre :

(i) Il existe des points $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ qui forment un simplexe avec les $\|x_i - x_j\| = d_{ij}$

(ii) Pour toute sous-famille de taille k extraite, le déterminant de Cayley-Menger associé est de signe $(-1)^k$.

IV. DE L'ANALYSE ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1- Régularité.

Prop : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est C^∞.

App : $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dense mais pas connexe.

Prop : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\det(A) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{co}(A)\, H)$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

App : $\mathcal{O}_n$, SL_n sont des sous-variétés.

2- Jacobien et équations différentielles

Théorème : Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ une fonction et $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme. On a :

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f \circ \varphi(x)\, |\det \mathrm{Jac}\,\varphi(x)|\, dx \quad \text{où} \quad \mathrm{Jac}\,\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}.$$

App : $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféo de jacobien $\det \mathrm{Jac}\,\Phi(r,\theta) = r$

App : Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\Theta = \mathrm{Arg}(X,Y)$ vérifient $R^2 \sim \mathcal{E}(1)$, $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$

App : Équation variationnelle du flot : $\frac{d}{dt}\left(\det \frac{\partial X(t, t_0, x)}{\partial x} \right) = \mathrm{div}\, F\left(t, X(t,t_0,x)\right) \det \frac{\partial X(t,t_0,x)}{\partial x}$.

$\det \frac{\partial X}{\partial x}(t_0, t_0, x) = 1$ et $\frac{d}{dt} X(t, t_0, x) = F(t, X(t, t_0, x))$, $X(t_0, t_0, x) = x$.

App : Systèmes conservatifs.

3- Optimisation.

Prop (Hadamard) : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes $|\det A| \leq \|X_1\|_2 \cdots \|X_n\|_2$ égalité ssi $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Prop : Si $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $t \in [0,1]$ $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$

App (John-Loewner) : Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, non vide. Il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0 contenant K.

Leçon 153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Comme toutes les leçons de réduction, c'est tranquille avec l'*Algèbre Linéaire - Réduction des endomorphismes* de Roger Mansuy auquel on adjoint quelques trucs du H2G2 notamment en ce qui concerne les corps finis. Les résultats qui mêlent topologie et réduction sont donnés par Beck, Malick, Peyré dans *Objectif Agrégation*.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction. Applications

$\mathbb{K}$ est un corps et E un $\mathbb{K}$-ev. de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

I. POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES [Hausey, ORA]

1. L'Algèbre $\mathbb{K}[u]$

Def/Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ qui à $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum a_i X^i$, associe $P(u) := \sum a_i u^i \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbres. Son image est noté $\mathbb{K}[u]$, c'est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Def Un polynôme annulateur de u est un élément de

$$I_u := \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$$

Prop : En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur

Exemple : Les endomorphismes nilpotents admettent des monômes pour polynômes annulateurs.

Contre-exemple : La dérivation dans $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de polynôme annulateur

Prop/déf : I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. L'unique polynôme unitaire qui l'engendre est noté π_u et est appelé polynôme minimal de u.

Exemple : Si u est un projecteur $\pi_u = X^2 - X$.

Déf : Si $x \in E$, on note $\pi_{u,x}$ et on appelle polynôme minimal de u en x l'unique générateur unitaire de $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}$

Prop : On a $\pi_{u,x} \mid \pi_u$ pour tout $x \in E$ et il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$. (après ou dans un corps infini)

Prop : $\mathbb{K}[u] \overset{\text{alg}}{\cong} \frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$ et si $\pi_u = P_1 \cdots P_l$ est une décomposition en facteurs irréductibles de π_u, $\mathbb{K}[u] \overset{\text{alg}}{\cong} \frac{\mathbb{K}[X]}{\langle P_1 \rangle} \times \cdots \times \frac{\mathbb{K}[X]}{\langle P_l \rangle}$.

Application (calcul de l'inverse) : Si $P \in I_u$ avec $P(0) \neq 0$ alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Application (calcul de puissances) : Si π_u est de degré d, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u^m \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^d)$.

Prop : Le polynôme minimal est un invariant **non** complet pour l'action par conjugaison ↳ $\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

2. Lemme des noyaux

Proposition : Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker P(u) = \ker (P \wedge \pi_u)(u)$

Corollaire : Soit $P \mid \pi_u$. On a $\pi_{u|_{\ker P(u)}} = P$

Lemme (noyaux) : Soit $(P_k)_{k \in \{1,\dots,N\}}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :

$$\ker \left(\prod_{i=1}^{N} P_i\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^{N} \ker P_i(u)$$

De plus, le projecteur de $\ker \left(\prod_{i=1}^{N} P_i\right)(u)$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en u.

Application : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i^{d_i}(u)$ où $\pi_u = P_1^{d_1} \cdots P_r^{d_r}$

Prop : Si F est stable par u, $\ker P(u|_F) = F \cap \ker P(u)$

3. Le polynôme caractéristique

Proposition : Les valeurs propres d'un endomorphisme sont exactement les racines du polynôme minimal.

Déf : Le polynôme caractéristique est $\det(X\mathrm{Id} - u) =: \chi_u$.

Théorème (Cayley-Hamilton) $\pi_u \mid \chi_u$.

Prop : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

Prop : Si λ valeur propre de u, alors $0 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_u (multiplicité algébrique)

Prop : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

II - LE CAS OÙ π_u EST À RACINES SIMPLES : DIAGONALISABILITÉ

1. Théorèmes et critères de diagonalisabilité

Théorème : Il y a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable (ii) $\exists P \in \mathbb{K}[u]$ scindé à racines simples
(iii) π_u est scindé à racines simples (iv) χ_u scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$.

Exemples : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
Contre-exemple : Les endomorphismes nilpotents ne sont pas diagonalisables.

Prop : Dans $\mathbb{F}_q$, il y a $\displaystyle\sum_{m_1+\dots+m_q=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$ matrices diagonalisables

$\mathbb{K}$ de caract $\neq 2$

Théorème (codiagonalisation) : Une famille $(u_k)_k$ d'endomorphismes diagonalisables est co-diagonalisable ssi ils commutent deux à deux

Prop : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi son orbite sous l'action par conjugaison sous $GL_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Dans un espace euclidien/hermitien (Gordon)

Théorème (spectral) Un endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

Théorème (endomorphismes normaux) Il y a équivalence entre :
(i) $uu^* = u^*u$ (ii) u se diagonalise en base orthonormée

3. Les endomorphismes semi-simples

Déf : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple lorsque tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Théorème : u est semi-simple $\iff$ π_u n'a pas de facteur carré dans sa décomposition en irréductibles.

Théorème : Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, semi-simple $\iff$ diagonalisable

Théorème : Si $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, semi-simple $\iff$ diagonalisable dans une extension $E/\mathbb{K}$.

III - LE CAS π_u SCINDÉ : TRIGONALISATION

1. Critères de trigonalisabilité

Théorème : Il y a équivalence entre :
(i) u trigonalisable (ii) π_u est scindé (iii) $\exists P \in \mathbb{K}[u]$ scindé

Exemples : Les nilpotents sont trigonalisables.
Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, u est trigonalisable.

Théorème : Une famille finie d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux est trigonalisable.

Contre-exemple : La réciproque est fausse.

Prop : La restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme trigonalisable est trigonalisable.

Théorème (Gauss) : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit triangulaire supérieure.

Application : Résolution directe des systèmes linéaires $Ax = b$.

2. Topologie et réduction. [OA]

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ matrices dz, $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ matrices tz, $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ dz à vp distinctes

Théorème : Dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, on a : $\overline{\mathcal{C}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathring{\mathcal{D}}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_n(\mathbb{K})$

Proposition : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Corollaire : $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

3. Décomposition de Dunford

Théorème (Dunford) Soit u tel que Π_u soit scindé. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que $u = d + n$, $nd = dn$, n nilpotent, d diagonalisable. De plus, d et n sont des polynômes en u.

Déf (Sous-espace caractéristique) $\ker(f - \lambda id)^\alpha$

Théorème (Dunford généralisé). Si χ_u pas scindé on a la même conclusion en remplaçant d par s semi-simple

Application : Calcul d'exponentielle matricielle. ↑ sur $\mathbb{R}$

4. Réduction de Jordan

Théorème (Cas nilpotent). Si u est nilpotent, alors il existe une base dans laquelle u est diagonale par blocs avec des blocs de la forme $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$

Il y a exactement $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ blocs de taille i où $\lambda_i = \dim \ker u^i - \dim \ker u^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (cas général) Idem avec des blocs $\lambda Id_i + J_i$.

Application : Équations différentielles linéaires – Théorème de Lyapunov.

5. Réduction de Frobénius.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille $P_1, \dots, P_r$ de polynômes unitaires et une famille $E_1, \dots, E_r$ de sous-espaces de E tels que (i) $P_{r+1} | \dots | P_1$ (ii) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ (iii) E_i est stable par u et $u|_{E_i}$ est cyclique de polynôme P_i.

Application (réduction de Frobénius) Dans une base, u est de la forme $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ où C_{P_i} matrice compagnon de u.

Application : M et ${}^tM$ sont semblables.

Application : Décomposition de Jordan des nilpotents.

Leçon 154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Comme toutes les leçons de réduction, c'est tranquille avec l'*Algèbre Linéaire - Réduction des endomorphismes* de Roger Mansuy auquel on adjoint quelques trucs du H2G2 notamment en ce qui concerne les corps finis. Les résultats qui mêlent topologie et réduction sont donnés par Beck, Malick, Peyré dans *Objectif Agrégation.*

Cette leçon a été réalisée en collaboration avec Gabriel Lepetit, keur sur lui.

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphisme. d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

154

Cadre : K corps, E K-espace vectoriel de dimension finie

I. Généralités et exemples

1. Définitions [Man p. 15]

Déf 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E. On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$

Ex 2 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables par f.

Prop 3 : Si F est stable par $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors F est stable par $f+g$ et $f \circ g$.

Prop 4 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in GL(E)$ et F est stable par f, alors $g(F)$ est stable par $g \circ f \circ g^{-1}$

Ex 5 : Si ρ est une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Δ et f une isométrie, alors $f \circ \rho \circ f^{-1}$ est une rotation d'axe $f(\Delta)$.

Remarque 6 : Si $E = F \oplus G$ où F, G sont stables par f et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont des bases respectives de F et G, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f_G) \end{pmatrix}$

Notation 7 : Si F est stable par f, l'induit de f sur F est $f_F : F \to F$

Prop 8 : Si F est stable par f, $\Pi_{f_F} \mid \Pi_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$

Prop 9 : Si $E = F \oplus G$, F, G stables par f alors $\Pi_f = \mathrm{ppcm}(\Pi_{f_F}, \Pi_{f_G})$.

2. Exemples de sous-espaces stables [Man p. 16]

Ex 10 : Si f est une homothétie, tout sev est stable par f

Prop 11 : Soit p projecteur, $F \subset E$ est stable par p ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\mathrm{Im}\, p$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}\, p$

Ex 12 : si s est une symétrie, F est stable par s ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$

Ex 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les sous espaces stables par $M \in \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ $\quad M \longmapsto \mathrm{tr}(AM) I_n$ sont ceux qui contiennent I_n ou sont inclus dans $H = \{M / \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.

Prop 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $n = \dim E$. Les sous-espaces stables par f sont les $\mathrm{Ker}\, f^k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Déf 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$. Le sous-espace cyclique de f associé à x est le plus petit sev stable par f contenant x. On le note $E_{f,x}$.

Prop 16 : $E_{f,x} = \mathrm{Vect}(f^k(x), k \in \mathbb{N})$.

Prop 17 : $\dim E_{f,x} = \deg \Pi_{f,x}$ où $\Pi_{f,x}$ est l'unique générateur unitaire de $\{P \in K[X] / P(f)(x) = 0\}$ idéal de $K[X]$.

3. Fabriquer des sev stables : le lemme des noyaux [OA] [Gou]

Thm 18 [OA 165] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \dots, P_k \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors $\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, P_i(f)$

Application 19 : Il existe $x \in E$: $\Pi_{f,x} = \Pi_f$. [OA 165]

Appli 20 : Si F est stable par f et $\Pi_f = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$, alors $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathrm{Ker}\, P_i^{\alpha_i}(f) \cap F)$

Déf 21 : Si χ_f est scindé sur K, $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on appelle $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i. [Gou 191]

Prop 22 : E est somme directe des N_i, $\dim N_i = \alpha_i$ et N_i est stable par f

Thm 23 [Gou 164] : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable ssi χ_f est scindé sur K et pour toute racine λ_i de multiplicité α_i, $\alpha_i = \dim E_{\lambda_i}$

Cor 24 : Si χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

Thm 25 [Gou] : $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur K

Remarque 26 [OA 166] : Si u est diagonalisable / trigonalisable et F est stable par u, alors u_F est diagonalisable / trigonalisable.

Thm 27 [Gou 193] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur K. Il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent et $f = d + n$, $n \circ d = d \circ n$

Appli 28 : Si $f = d + n$ comme dans le théorème, $\exp(f) = \exp(d) \circ \exp(n)$ et il est facile de calculer l'exponentielle d'un diagonalisable / nilpotent

Ex 29 : f est diagonalisable $\iff \exp(f)$ est diagonalisable (si Π_f est scindé)

4. Supplémentaires stables et dualité.

[Gou 130]

Prop 30 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $F \subset E$ est stable par $u \iff F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

où $F^\perp = \{\varphi \in E^* / \varphi_{|F} = 0\}$ est l'orthogonal au sens de la dualité.

Application 31. Si $x \in E^*$ est un vecteur propre de ${}^t u$, alors $(Kx)^0 = \{y \in E / \forall \varphi \in (Kx), \varphi(y) = 0\}$ est un hyperplan de E stable par u.

II. Stabilité et commutation.

1. Comportement vis à vis des sous-espaces stables

Prop 32 [OA159] Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uov = vou$. Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par v

[Man 26]

Ex 33 : ~~Si K est algébriquement clos,~~ les seuls endomorphismes commutant avec tous les éléments de $GL(E)$ sont les homothéties [Man 26]

Ex 34 : Si p est un projecteur, p commute avec $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $\ker(p-id)$ et $\ker(p)$ sont stables par u.

[Man 30]

2. Reductions simultanées [Gou]

Thm 35 [Gou 171] Soit $(f_i)_{i \in I}$ famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Alors si $\forall i \in I$, f_i est diagonalisable (resp. trigonalisable), il existe une base B de E telle que $\forall i \in I$ $\mathrm{Mat}_B(f_i)$ est diagonale (resp. triangulaire)

Ex 36 [Man 85] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Ex 37 [OA 166] Si $f \circ g = g \circ f$ et f, g diagonalisables, alors $f+g$ est diagonalisable.

Appli 38 [OA 205] Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $GL_n(K) \simeq GL_m(K) \iff n = m$

Appli 39 [OA 206] Si K est algébriquement clos et G sous-groupe abélien d'ordre n de $GL_n(K)$. Si $n \wedge \mathrm{car}(K) = 1$, G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

3. Endomorphismes normaux.

Ici, $K = \mathbb{R}$, E est euclidien

Def 40 [Gou 256] $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $uou^* = u^* ou$ où u^* est l'adjoint de u : $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ $\forall x, y \in E$.

Lemme 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F est stable par $u \iff F^\perp$ est stable par u^*.

Remarque 42 : si u est normal, F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u.

Théorème 43. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

Théorème 44 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, il existe une base orthogonale B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ 0 & & & A_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$

Application 45 : • Si $u \in O_n(\mathbb{R})$, il existe B orthogonale telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ 0 & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$ et $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

• Si $u^* = -u$, ~~il~~ B telle que $\mathrm{Mat}_B(u)$ soit diagonale à coefficients dans $i\mathbb{R}$.

• théorème spectral pour les endomorphismes symétriques.

Appli 46 : u est normal $\iff u^* \in \mathbb{R}[u]$ [dSP 196]

Appli 47 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $\{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = -1\}$. [dSP 193]

Appli 48 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective [FGNA3, 65].

III. Stabilité et cyclicité

1. Théorème de Jordan. [Gou], [H2G2]

Soit A nilpotente, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Lemme 49 : $K_i = \ker A^i$ est un sev stable par A. On note $k_i = \dim \ker A^i$

Prop 50 : La suite $\lambda_i = k_i - k_{i-1}$ vérifie $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 \leq \lambda_{i+1} \leq \lambda_i$

Théorème 51 (Jordan) A est semblable à $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$ où $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

les blocs de taille k sont en nombre $\lambda_k - \lambda_{k+1}$. La classe de similitude de A est caractérisée par la suite (λ_i) [H2G2 92]

Remarque 52 : On établit la réduction de Jordan de A en écrivant le tableau de Young associé à (λ_i), voir annexe.

Appli 53 : A et ${}^t A$ sont semblables (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque)

2. Réduction de Frobenius [Gou p 289]

Déf 54 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_u(x) = E$.

Prop 55 : u est cyclique ssi $\chi_u = \Pi_u$ ssi $\mathrm{Mat}_B(u) = C_P$ pour $P \in K[X]$ dans une bonne base

DVP1

Thm 56 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille de polynômes $P_1 | \dots | P_r$ et $E_1, \dots, E_r$ sev de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ et $\forall i \in [1, r]$, E_i est stable par u et u_{E_i} est cyclique de polynôme minimal P_i. Les P_i sont les invariants de similitude de u

Corollaire 57 : Il existe une base B telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$

Corollaire 58 : u et v sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont mêmes invariants de similitude

Remarque 59 : on retrouve la décomposition de Jordan.

Remarque 60 : les invariants de similitudes se retrouvent avec le théorème des facteurs invariants de Smith appliqué à $C_P - XI$.

IV. À la recherche d'un supplémentaire stable.

1. Stabilité et $K[X]$-modules [OA p 269]

Prop 61 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on munit E d'une structure de $K[X]$-module en posant $P \cdot x = P(u)(x)$. On note (E, u) cette structure. Alors :
- Un morphisme $\varphi : (E,u) \to (F,v)$ est un $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ u = v \circ \varphi$
- $(E,u) \simeq (F,v)$ en tant que $K[X]$-modules ssi u et v sont semblables.
- Les sous-$K[X]$-modules de (E,u) sont les sev stables par u.
- Une somme directe de sous-espaces stables est une somme directe au sens des $K[X]$-modules.

2. Semi-simplicité. [Gou] [OA]

Déf 62 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sev stable par u admet un supplémentaire stable

DVP2

Théorème 63 : u est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts.

Ex 64 : Si K est algébriquement clos, u est semi-simple ssi il est diagonalisable.

Prop 65 : Si $\mathrm{car}\, K = 0$, E ($\mathrm{dim} K$) est semi-simple $\Leftrightarrow$ il existe une extension de K dans laquelle M est diagonalisable

Remarque 66 : u est semi-simple $\Leftrightarrow$ (E,u) est un $K[X]$-module semi-simple

V. Applications en théorie des représentations. [Col]

F fini

Déf 67 : Une représentation du groupe G est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ [235] où V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Ex 68 : La représentation de permutation de G est $\rho(g) : e_h \mapsto e_{gh}$ où $V = \mathrm{Vect}(e_h, h \in G)$ [239]

Déf 69 : Une sous-représentation de (V, ρ) est un sev de V stable par $\rho(g)$ $\forall g \in G$. On dit que (V, ρ) est irréductible s'il n'admet pas de sous-représentation non triviale [242]

Prop 70 : Soit (V, ρ) représentation de G. Il existe un produit scalaire sur V, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, tel que $\forall g \in G$, $\forall v_1, v_2 \in V$, $\langle \rho(g)(v_1), \rho(g)(v_2) \rangle_G = \langle v_1, v_2 \rangle_G$

Thm 71 (Maschke) : Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles [244]

Remarque 72 : Si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, le nombre de W_i isomorphes entre eux que représentation à W irréductible ne dépend pas de la décomposition en irréductibles de V choisie. [248]

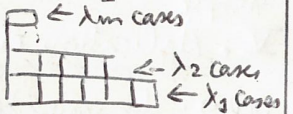
Ex 73 : Si G est abélien, les représentations irréductibles sont de dimension 1

Prop 74 [Ulmer] : Soit G groupe fini de caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_m$. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j \in J} \ker \chi_j$ où $J \subset [\![1, m]\!]$, avec $\ker \chi_i = \{g \in G / \chi(g) = \chi(e)\}$

Annexe [H262]

Soit $(\lambda_i)_{1\le i\le m}$ une suite décroissante d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = n$.

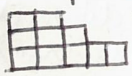
Le diagramme de Young associé à λ est $Y(\lambda)$:



Le diagramme dual Y^* est celui obtenu en ~~faisant~~ intervertissant lignes et colonnes.

Si (λ_i) est la suite définie dans la proposition 50, $Y^*(\lambda)$ détermine le nombre et la taille des blocs de Jordan.

Ex : $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence 3, $k_1 = 5$, $k_2 = 8$.

Donc $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$.  $Y(\lambda)$;  $Y^*(\lambda)$

La réduction de Jordan de A est $\begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & J_2 \; J_1 \end{pmatrix}$ avec $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_1 = (0)$.

Références

- [Gou] : X. Gourdon, Algèbre, 2ème édition
- [OA] : V. Beck, J. Malick, G. Peyré, Objectif Agrégation
- [Man] : R. Mansuy, R. Mneimné, Réduction des endomorphismes
- [Col] : P. Colmez, Eléments d'analyse et d'algèbre
- [FGNAR3] : Francinou-Gianella, Oraux X-ENS : Algèbre 3
- [H262] : Caldero, Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, T. 1.
- [dSP] : C. de Seguins-Pazzis, Invitation aux formes quadratiques

Leçon 155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Comme toutes les leçons de réduction, c'est tranquille avec l'*Algèbre Linéaire - Réduction des endomorphismes* de Roger Mansuy auquel on adjoint quelques trucs du H2G2 notamment en ce qui concerne les corps finis. Les résultats qui mêlent topologie et réduction sont donnés par Beck, Malick, Peyré dans *Objectif Agrégation.*

La partie représentations est inutile en tant que telle : on peut inclure tous les résultats qu'elle contient dans les parties précédentes.

À noter (c'est très simple) qu'on peut toujours *presque* diagonaliser et inverser une matrice grâce à la décomposition polaire et au théorème spectral, c'est l'idée de la décomposition en valeurs singulière (SVD) dont le détail est dans le *Linear Algebra* de P. D. Lax ou dans le *Numerial Mathematics* de Quarteroni, Sacco, Saleri. À noter qu'une application importante et pas difficile est la résolution au sens des moindres carrés des systèmes linaires (voir les mêmes Quarteroni, Sacco, Saleri) et que l'on obtient la décomposition SVD à partir de la décomposition QR. Ça peut être important pour l'épreuve de modélisation (coucou cher jury).

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

I- OUTILS

1- Éléments propres

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f lorsque $f - \lambda id$ n'est pas injective
- Un vecteur propre $x \in E$ associé à la vap $\lambda \in \mathbb{K}$ est un vecteur tq $f(x) = \lambda x$
- Le sous-espace propre de f associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ est $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id)$
- La multiplicité géométrique de $\lambda \in \mathbb{K}$ est $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda(f)$.

Prop : Des vep associés à des vap deux à deux distinctes forment une famille libre

Coro : En dimension n, un endo a au plus n vap distinctes.

Prop : Des sous-espaces propres associés à des vap 2 à 2 $\neq$ sont en $\oplus$.

2- Polynômes d'endomorphismes et éléments propres-

Notation : On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée des polynômes en $f \in \mathcal{L}(E)$.

Def : $I_f = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et l'unique polynôme unitaire qui l'engendre s'appelle le polynôme minimal de f et on le note π_f.

Lemme (noyaux) : Soit $(P_k)_k$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors $\ker\left(\prod_{k=1}^{N} P_k\right)(f) = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(f)$

Def (sous-espace caractéristique) : Si $\chi_f = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\alpha_k}$ est la décomp. en facteurs irréductibles de χ_f, on appelle ss-espace caract $\ker P_k^{\alpha_k}(f)$.

Prop : Les vap de f sont exactement les racines de π_f.

Def (mult. min) : La multiplicité min de $\lambda \in \mathbb{K}$ est $m_m(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de π_f.

Def (polcar) : Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :
$$\chi_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$$

Prop/Déf : Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A$. On appelle polynôme caract. de $f \in \mathcal{L}(E)$ le polynôme caractéristique d'une matrice de f dans n'importe quelle base.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de χ_f sont exactement les vap de f.

Coro : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f admet au moins une vap.

Déf : La multiplicité algébrique de $\lambda \in \mathbb{K}$ notée $m_a(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f.

Thm (Cayley-Hamilton) : $\pi_f \mid \chi_f$.

II- DIAGONALISABILITÉ

1- Définition, critères, exemples-

Déf : Un endomorphisme est diagonalisable lorsqu'il existe une base de vecteurs propres pour cet endomorphisme. Une matrice est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Prop : Si f admet n vap distinctes alors f est dz.

Ex : Une matrice triangulaire avec des coef diagonaux 2 à 2 $\neq$ est dz.

Coro : Si χ_f est scindé à racines simples alors f est dz.

Théorème (critères) : Il y a équivalence entre (1) f diagonalisable (2) $\exists P \in I_f$ scindé à racines simples (3) π_f est sans (4) χ_f scindé et $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$
(4) : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} E_\lambda(f)$. (5) $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}} \dim E_\lambda(f) = n$.

Prop (AVANT) : La restriction d'un endo dz à un sev stable est dz.

Thm (corps fini) : Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, f dz $\Leftrightarrow X^q - X \in I_f$.

Ex : Si car $\mathbb{K} \neq 2$, les projecteurs et symétries sont dz.

C-ex : Les endo nilpotents ne sont pas dz.

Ex : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$ est dz

Ex : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dz sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

2. Topologie et réduction

Notations : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ens des matrices dz ; $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ens des matrices tz ; $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ ens des matrices dz à vap distinctes ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Prop : $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ dense dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_n(\mathbb{K})$

⋮

Prop (AVANT) nombre de matrices dz lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$

3. Codiagonalisabilité

Déf : Une famille finie d'endomorphismes $(f_k)_{k \in \{1,\dots,N\}}$ est dite co-diagonalisable lorsqu'il existe une base commune de diagonalisation

Prop : $(f_k)_{k \in \{1,\dots,N\}}$ est co-dz ssi les endo commutent deux à deux.

Ex : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sym dz, $M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Ex : Si $f \circ g = g \circ f$ et f, g dz alors $f+g$ est dz.

C-ex : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dz mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Appl : Si car $\mathbb{K} \neq 2$, $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K}) \iff n = m$.

Appl : Si $\mathbb{K}$ alg clos et G sous-groupe abélien d'ordre n de $GL_m(\mathbb{K})$ Si $n \wedge \text{car}\,\mathbb{K} = 1$, G est conjugué à un sous-groupe du groupe les matrices diagonales.

III. GÉNÉRALISATION ET CAS EUCLIDIEN.

1. Endomorphismes semi-simples.

voir 154

2. Réduction des endomorphismes normaux et applications.

voir 154

3. Diagonalisabilité et cyclicité

Déf cyclique, Frobenius.

Prop : $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique et dz $\iff$ f admet n vap distinctes [OA].

IV. DÉCOMPOSITIONS MATRICIELLES ET THÉORÈMES SPECTRAUX.

1. Décomposition de Dunford.

2. Décomposition polaire.

déf
SVD
pseudo-inverse
moindres carrés
} [QSS].

V. EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS.

- $p(g)$ est toujours dz → sous-groupes distingués.
  ↳ ex ↖
- FFT ?
- rep d'un groupe commutatif sont de dim 1

Leçon 156

Exponentielle de matrices. Applications.

Allez voir chez Grégoire Clarté et David Michel, c'est vraiment top.

Leçon 157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Comme toutes les leçons de réduction, c'est tranquille avec l'*Algèbre Linéaire - Réduction des endomorphismes* de Roger Mansuy auquel on adjoint quelques trucs du H2G2 notamment en ce qui concerne les corps finis. Les résultats qui mêlent topologie et réduction sont donnés par Beck, Malick, Peyré dans *Objectif Agrégation.*

En particulier, la partie sur les classes de similitude en dimension 2 est très bien détaillée dans le livre de Roger Mansuy, avec un joli dessin à la fin.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

E un $\mathbb{K}$-ev de dim f. $u \in \mathcal{L}(E)$

I - SUR LES ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLES

1. Définition et caractérisation.

Déf : Un endomorphisme de E de dim finie est **trigonalisable** s'il laisse un drapeau stable ou de façon équivalente s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Théorème : Il y a équivalence entre :
(i) u est trigonalisable (ii) χ_u est scindé (iii) π_u est scindé (iv) u admet un polynôme annulateur scindé.

Corollaire : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), tout endomorphisme est trigonalisable.

Corollaire : Si $Sp\, u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ dans un corps algébriquement clos, alors $Tr\, u = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et $\det u = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Corollaire : La restriction d'un endomorphisme trigonalisable à un sous-espace stable est trigonalisable.

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable.

Application : Classes de similitudes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

2. Co-trigonalisation

Théorème : Une famille finie $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes trigonalisables dont les éléments commutent deux à deux est co-trigonalisable.

Contre-exemple :

3. Topologie (OA)

Prop° : L'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop° : $\overline{\mathcal{C}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n^\circ(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_n(\mathbb{K})$

Donc
- $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$
- $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Prop° : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$. Il existe une matrice triangulaire supérieure dont semblable à M dont les termes surdiagonaux sont de module $\leq \varepsilon$.

II - ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

1- Définition et caractérisations et propriétés

Déf: u est nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.
Le plus petit p est appelé indice de nilpotence.

Théorème: Il y a équivalence entre :

(i) u est nilpotent (ii) $u^n = 0$ (iii) $\chi_u = X^n$ (iv) les vap de u sont toutes nulles (v) $\mathrm{Tr}(u^k) = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$ (vi) u est semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle

Exemple: Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent

Déf et prop: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, la suite des noyaux itérés :
$\{0\} \subset \ker u \subset \ker u^2 \subset \dots \subset \ker u^k$ est une suite dont la suite des dimensions des sous-espaces est croissante donc stationnaire.

Prop: $\ker u^j = \ker u^{j+1} \Rightarrow \forall m \geq j, \ \ker u^j = u^m$.

Rem: Si u est nilpotent d'indice de nilpotence $p \leq n$, la suite stationne à partir de p. u nilp $\Leftrightarrow \exists p$ tq $\ker u^p = E$

Prop (Fitting): $p = \min\{j \in \mathbb{N}, \ker u^j = \ker u^{j+1}\} = \min\{j \in \mathbb{N}, \mathrm{Im}\, u^j = \mathrm{Im}\, u^{j+1}\}$
et $E = \ker u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.
avec cette décomposition $\mathrm{Mat} u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A nilpotente $B \in GL$ inversible

Prop°: Les sous-espaces stables par un nilpotent sont les $\ker u^i$

Déf: Tableaux de Young

2. Structure de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nilpotents

Prop: $\mathcal{N}$ est un cône qui n'est ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$, ni un sous-espace vectoriel (pas stable par addition)

Rem: Si u et v nilpotents et commutent alors $u+v$ nilpotent

Prop: Si v est semblable à u nilpotent alors v nilpotent.

Prop: $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \ker(\mathrm{Tr})$

Prop: u nilpotent $\Leftrightarrow 0 \in$ l'adhérence de la classe de similitude de u.

3. Une application : étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(MANSUY)

(Unipotents)

III - RÉDUCTIONS DE DUNFORD ET DE JORDAN

1 - Décomposition de Dunford

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé.
$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On appelle sous-espace caractéristique de u le sous-espace $E_i = \ker (u-\lambda_i id)^{\alpha_i}$. Il est stable par u et $u|_{E_i}$ est la somme d'une homothétie et d'un nilpotent

Théorème (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé.
Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $dn = nd$
- $u = n + d$.

d et n sont des polynômes en u.

Rem : $u \mapsto (d, n)$ n'est pas continue

Rem : Le calcul de d et n est effectif par "la méthode de Newton"

2 - Réduction de Jordan

Déf : Un bloc de Jordan de taille m est $J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ (m lignes, m colonnes)

Théorème (Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caract. est scindé
$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On note $\tilde{J}_m(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ (m lignes, m colonnes)

Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux de la forme $J_{m_{i,j}}(\lambda_i)$ avec $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $\sum_j m_{i,j} = \alpha_i$.

IV - DEUX APPLICATIONS EN PROBABILITÉS ET EN ANALYSE

1 - Calcul des puissances d'une matrice et chaînes de Markov

Plutôt calcul de exp ?

Prop° : Si $M = D + N$ selon la décomposition de Dunford, alors :
$M^k = (D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$

Déf : $\exp M = \sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$. On a $e^M = e^D e^N$

Prop : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective -

Aff : $\exp(J_n(\lambda)) = e^{\lambda}\left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}\right)$ où $J = \lambda I + N$

2 - Sur les équations différentielles linéaires à coef constants

On veut résoudre $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

En écrivant $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{N_s} \end{pmatrix}$ la réduction de Jordan

on obtient :

Théorème : Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, il existe α_j solutions indépendantes de la forme $y_{j,k}(t) = e^{t\lambda_j} P_{j,k}(t)$, $k = 1, \dots, \alpha_j$ où $P_{j,k}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}^d$ de degré $\leq k-1$.
Ces solutions forment un système fondamental de solutions.

Leçon 158

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le Gourdon contient l'essentiel de ce qu'il faut raconter au début et sur le théorème spectral. Le H2G2 permet de rajouter des actions de groupe comme le jury aime. Enfin, on peut finir en parlant d'optimisation : théorème de Courant-Fischer (P. D. Lax *Linear Algebra*), méthodes de gradient (développement), étude de la hessienne (P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*).

C'est la leçon que j'ai choisie à l'oral. Mon plan était assez semblable à ce qui suit et ça s'est pas mal passé.

158 Matrices symétriques réelles, Matrices hermitiennes -

I- GÉNÉRALITÉS

1- Définitions, propriétés algébriques -

Déf: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle matrice symétrique toute matrice égale à sa transposée et matrice antisymétrique toute matrice égale à l'opposé de sa transposée.

Prop: Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices de taille n resp. symétriques et antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique : $M = \frac{{}^tM + M}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$.

Ex: La matrice du laplacien discret $A = \begin{pmatrix} 2 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique -

Ex: La hessienne d'une fonction C^2

Déf: Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne lorsqu'elle est égale à sa matrice adjointe $M^* = {}^t\overline{M}$. Elle est antihermitienne lorsqu'elle est égale à l'opposée de sa matrice adjointe -

Prop: Ces ensembles notés respectivement $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{AH}_n(\mathbb{C})$ sont des sev supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{R}$-ev. Ils sont de dimension n^2 et $M \mapsto iM$ est un isomorphisme $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{AH}_n(\mathbb{C})$.

2- Endomorphismes d'un espace euclidien, hermitien, formes bilinéaires et formes quadratiques

Def: Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, φ est dite bilinéaire lorsque $x \mapsto \varphi(x,y)$ et $y \mapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires $\forall x, y \in E$ et sym lorsque $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que φ est sesquilinéaire lorsqu'elle est linéaire à droite et $\forall x_1, x_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall y \in E$, $\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \overline{\lambda}\varphi(x_2, y)$ - Elle est dite hermitienne lorsque $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$

Ex: Si $E = C([0,1], \mathbb{C})$, $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$, $(f,g) \mapsto \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt$ est sesquilinéaire -

Prop: L'ens des formes bilinéaires (sesquilinéaires) symétriques (hermitiennes) est isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ($\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$) via le choix d'une base de E par $\varphi \mapsto M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$

Déf Soit φ une forme bilinéaire sym (resp. sesquilinéaire hermitienne) On appelle forme quadratique (resp. hermitienne) l'application $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ - De plus φ définit uniquement q et est appelée forme polaire de q.

Déf. On dit qu'une forme quadratique q (resp. hermitienne) est positive lorsque $\forall x \in E$, $q(x) \geqslant 0$. Elle est définie positive lorsque $\forall x \neq 0$, $q(x) > 0$. Sa forme polaire est alors appelée produit scalaire (resp. produit scalaire hermitien).

Déf: $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$) désigne l'ens. des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) dont la forme bilinéaire associée est positive - (resp. herm) $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{K})$ lorsqu'elle est définie positive -

Prop Soit φ une fbs++(hermitienne). Alors $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E : **Ex :** Sur $E = \mathbb{C}^n$, $X \mapsto {}^tXAX$ où $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Déf: Un ev. E de dim finie muni d'un ps (hermitien) est dit euclidien (hermitien). On notera $(\cdot,\cdot)$ ce produit scalaire -

Déf (adjoint) Soit E euclidien (hermitien) et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle adjoint de u l'unique endo u^* tq $\forall x, y \in E$, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$.

Prop: u^* a pour matrice M^* lorsque u a pour matrice M. Lorsque $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})/\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ on dit u autoadj:

II. ACTION PAR CONGRUENCE, RÉDUCTION.

1. Action par congruence.

Déf : $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$) par congruence (hermitienne) $(P, A) \mapsto PAP^*$. Par déf "être congruent" = "être dans la même orbite".

Déf : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel euclidien (hermitien). Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale lorsque $i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$ et orthonormée si en plus $\|e_i\| = 1$ $\forall i$.

Prop : Soit E un ev. A et B sont congruentes ssi elles représentent la même forme bilin. sym (hermitienne) dans deux bases différentes. par exemple $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$. Dans ce cas $B = PAP^*$ et P^* est la matrice de passage de f à e.

Def Soit (E, q) un espace quadratique. A la matrice associée à q dans une base.
$O(q) = Stab(A) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ PA^tP = A\}$ ou $U(q) = Stab_g(A) = \{P \in GL_n(\mathbb{C}),\ PAP^* = A\}$.
Lorsque $A = I_n$ on note $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

Prop - Soit $(E, \langle , \rangle)$ euclidien (hermitien), alors $A \in O_n(\mathbb{R})$ (resp $U_n(\mathbb{C})$) ssi A est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

2. Propriétés spectrales

Lemme : Soit $(E, \langle \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Si F est un sev stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Thm (spectral) : Soit E un espace euclidien ou hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint alors il existe une bon de vecteurs propres pour f et de plus ses vap sont reelles

Corollaire : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) alors $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ (resp $O \in U_n(\mathbb{C})$) telle que $OMO^* = D$; D diagonale reelle.

Corollaire : Soient M, N deux matrices symétriques (hermitiennes) tq M déf pos. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $PMP^* = I_n$ et $PNP^* = D$ où D est diagonale réelle.

Thm (Sylvester). Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors M est congrue à $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ (r fois 1, s fois 0). On appelle (r, s) la signature de M. On a :
$Orb(A) = Orb(B) \Leftrightarrow rgA = rgB$ et A et B ont même signature

Déf: On note $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ et $O(r,s) = Stab(I_{r,s})$.

Prop : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme et on a :
$O(r,s) \simeq O(r) \times O(s) \times \mathbb{R}^{rs}$.

Aff : Classification des quadriques non dégénérées en fonction de la signature

3. Décomposition polaire.

III. APPLICATIONS À L'OPTIMISATION.

1. L'ellipsoïde de John-Loewner.

2. À la recherche d'extrema : Morse, Morse.

3. Résolution de systèmes linéaires par méthodes de gradient.

Avant : Interprétation variationnelle des valeurs propres

Rayleigh.
Courant-Fischer.

Leçon 159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Cadre : E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, de dim. finie n

I. DUALITÉ ALGÉBRIQUE

1) Dual et bidual

Définition 1. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $E \to \mathbb{K}$.

Exemple 2. · L'application trace dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
· Les applications coordonnées dans une base $(e_1, \dots, e_n)$.

Définition 3. L'ensemble des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace dual de E et noté E^*.

Notation 4 : Si $x \in E$ et $\varphi \in E^*$, on note parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$

Définition 5. On appelle bidual de E, l'espace dual de E^*, noté E^{**}.

2. Les liens entre E, E^* et E^{**} [Gourdon]

Définition 6. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors on définit la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ où $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$. C'est

Théorème 7. La base duale d'une base de E est une base de E^*. En particulier $\dim E = \dim E^*$.

Proposition 8. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$

Proposition 9. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit sa base duale.
On l'appelle base antéduale

Remarque 10 : La preuve de la proposition 9 utilise le théorème.

Théorème 11. $E \longrightarrow E^{**}$, $x \longmapsto \left| \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme

Remarque 12 : La construction de la base antéduale n'est pas effective.

Exemple 13 : $a_0, \dots, a_n$ des points distincts de $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit $\varphi_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$. Les (φ_i) forment une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ dont la base antéduale est donnée par les polynômes interpolateurs de Lagrange $P_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Exemple 14 : $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$, $A \longmapsto \left| \begin{array}{l} f_A : X \mapsto \mathrm{tr}(AX) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. [FGN al1]

Théorème 15 (Riesz) En munissant E d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ et du produit scalaire euclidien associé à cette base, noté $\langle , \rangle$, on a :
$\Phi : E \longrightarrow E^*$, $a \longmapsto \left| \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle a, x \rangle \end{array} \right.$ est une isométrie surjective.

Application 16 : la différentielle $df(a)$ d'une application $f : E \to \mathbb{R}$ est représentée de manière unique par le vecteur gradient $\nabla f(a)$.

II. ASPECTS GÉOMÉTRIQUES : ORTHOGONALITÉ, HYPERPLANS

1) Orthogonalité [Gourdon]

Définition 17. $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux lorsque $\langle \varphi, x \rangle = 0$

On définit : si $A \subset E$: $A^\perp = \{ \varphi \in E^*, \forall x \in A, \langle \varphi, x \rangle = 0 \}$ sev de E
· si $B \subset E^*$: $B^\circ = \{ x \in E, \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0 \}$ sev de E^*

Proposition 18 : • Si $A_1 \subset A_2 \subset E$ alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$ [Gourdon]
• Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$ alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$

Si $A \subset E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$ et si $B \subset E^*$, $B^\circ = (\mathrm{Vect}\, B)^\circ$

Théorème 19 • Si F sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\circ = F$
• Si G sev de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $(G^\circ)^\perp = G$

Proposition 20 : $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$
Pareil pour B_1°, B_2°.

Proposition 21 : description d'un sev en termes d'équations.

2. **hyperplan**. [Gourdon, RDO 1]

Définition 22 : On appelle hyperplan le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 23 : Il y a équivalence entre :
(i) H est un hyperplan de E (ii) Il existe une droite D tq $H \oplus D = E$.

Proposition 24 Soit H un hyperplan de E, $H^\perp$ est une droite de E^*.

Proposition 25 : Si ψ, φ sont dans E^*, $\ker \varphi \subset \ker \psi \Rightarrow \psi = \lambda \varphi$, $\lambda \neq 0$
$\ker \varphi = \ker \psi \Rightarrow \exists \lambda \neq 0, \psi = \lambda \varphi$

Théorème 26 : Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$, tels et $\varphi : E \to \mathbb{K}^p$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$
Alors $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in E,\ \varphi_i(x) = 0\}$ et $\mathrm{rg}\, \varphi = \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

3. Orthogonalité et transposition

Définition 27 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $f \in F^*$, on définit
${}^t u : F^* \to E^*$, $f \mapsto {}^t u(f) = f \circ u$ l'application transposée de u.

Proposition 28 : (i) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, {}^t u$ (ii) $\mathrm{Im}\, {}^t u = (\ker u)^\perp$ (dim E)
(iii) $\ker {}^t u = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ (dim quelconque)

Proposition 29 : Si $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$, alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Proposition 30 : Si M est la matrice de u dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors ${}^t u$ a pour matrice ${}^t M$ dans ces bases duales $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$.

Application 31 : Changement de base dans le dual et calcul de la base antéduale. [Gourdon]
Si C matrice de passage $(e_1, \dots, e_n) \to (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$
Alors ${}^t C^{-1}$ matrice de passage $(e_1^*, \dots, e_n^*) \to (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$.

III - PROBLÈMES MATRICIELS ET DE RÉDUCTION

Proposition 32 : Un sev F de E est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Théorème 33 : Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent, alors il existe une base de trigonalisation commune de f et g.

Théorème 34 : Réduction des endomorphismes symétriques [RDO 2 2.2-1].

Méthode 35 : On utilise dans ces deux théorèmes la méthode suivante
Si $\varphi \in E^*$ est un vecteur propre de ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$, alors $\ker \varphi$ est stable par u donc $(\ker \varphi)^\circ$ est un hyperplan stable par u.
On est ramené à la dimension $n-1$.

Théorème 36 - (Invariants de similitude, décomposition de Frobénius) -

Application 37 : réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

IV - ANALYSE CONVEXE EN DIMENSION FINIE - OPTIMISATION

1 - Théorèmes de séparation en dimension finie - (OA HUL p. 97)

Théorème 38 (un point, un convexe) Soit C un convexe de E et $x \notin C$, alors il existe $f \in E^*$ ~~tel que~~ $\in \mathbb{R}$ tels que $\forall c \in C$, $f(x) < \alpha < f(c)$.

Théorème 39 (Hahn-Banach géométrique) Soient C_1, C_2 deux convexes non vides disjoints. On suppose C_1 fermé et C_2 compact - Alors il existe un hyperplan qui sépare strictement C_1 et C_2 ie. $\exists f \in E^*$ tel que $\sup_{x \in C_1} f(x) < \inf_{y \in C_2} f(y)$

Théorème 40 (hyperplan d'appui) - Soit C un convexe non vide de E. Alors pour tout $x \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui à C en x c'est à dire $\exists f \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $x \in [f = \alpha]$ et $\forall c \in C$, $f(c) \leq \alpha$.

2 - Applications

Lemme : Soit $H_{f,\alpha}$ hyperplan d'appui à C compact convexe en $x \in C$ - x point extrémal de $C \Leftrightarrow x$ pt extr. de $C \cap H_{f,\alpha}$

Théorème 41 (Krein-Milman, Minkowski) - Soit C un compact convexe non vide de E - Alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : $C = co(E(C))$.

Application ? Birkhoff

Théorème de Farkas - Minkowski ? (bof) -

3 - Le théorème des extrema liés (Rouvière, ?)

Théorème 42 : Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et X l'ensemble défini par les équations $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$ avec $x \in U$.
Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$ et si les différentielles $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont des formes linéaires ind. sur $\mathbb{R}^n$ alors les formes linéaires $df(a), dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont liées :
$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p$ tq $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a)$.

Application : Entropie maximale -

Leçon 161

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Comme toutes les leçons de géométrie, j'ai principalement recopié le livre de M. Audin et celui de D-J. Mercier. Le livre de M. Berger est sans doute très bien mais un peu compliqué pour moi. J'aime pas trop la géométrie alors c'est sans doute pas terrible.

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dim finie. Applications en dimension 2 et 3.

cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine où l'ev sous-jacent E est euclidien de dimension n. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application affine, on note $\vec{f}$ son application linéaire associée.

I. GÉNÉRALITÉS

1. Définitions et premières propriétés

Déf : On appelle isométrie (affine) de $\mathcal{E}$ toute application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\|f(M)f(N)\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$.
On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Thm : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ ssi $f \in GA(\mathcal{E})$ et $\vec{f} \in O(E)$.

Ex : Les translations de $\mathcal{E}$: $t_{\vec{u}} : M \mapsto M + \vec{u}$ sont des isométries.

Ex : Les homothéties de rapport $\lambda = \pm 1$ sont des isométries. Une homothétie de rapport -1 et de centre O est appelée symétrie centrale

C-ex : Une homothétie de rapport $\lambda \neq \pm 1$ n'est pas une isométrie

Corollaire : $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

Prop : Les translations forment un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ isomorphe à $(E, +)$.

Déf : On définit les sous-groupes de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ suivants :
$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}),\ \vec{f} \in SO(E)\}$ (déplacements).
$\mathrm{Isom}^-(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}),\ \vec{f} \in O^-(E)\}$ (antidéplacements).

2. Écriture canonique, propriétés des isométries

Déf : Soit $O \in \mathcal{E}$ on note $\mathrm{Is}_O(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}),\ f(O) = O\}$ son stabilisateur sous l'action de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

Prop : En tant que sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, $\mathrm{Is}_O(\mathcal{E})$ est isomorphe à $O(E)$

Thm : (1) Soit $O \in \mathcal{E}$. Tout $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $g \in \mathrm{Is}_O(\mathcal{E})$.
(2) Toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - id)$ et g est une isométrie qui possède au moins un point fixe

rem : Il s'agit de voir que si $\ell \in O(E)$, $E = \mathrm{Ker}(\ell - id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\ell - id)$.

Corollaire : $Z(\mathrm{Isom}(\mathcal{E})) = \{id\}$.

rem : Dans $\mathbb{R}^n$, $f(v) = Mv + b$ où $M \in O_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Thm : On a une suite exacte courte scindée :
$1 \to E \xrightarrow{t} \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\vec{\ }} O(E) \to 1$

Thm : Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et soit $(B_0, \dots, B_n)$ tq $\forall i,j$, $\|\overrightarrow{B_iB_j}\| = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|$. Il existe une unique isométrie f telle que $f(A_i) = B_i$. De plus $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

II. ÉTUDE DE $O(E)$ ET CONSÉQUENCES

Prop : Via (structure affine) le choix d'une base : $O(E) \simeq O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I_n\}$

Corollaire : $O(E)$ est compact dans $GL(E)$.

Thm : Réciproquement, si $G \subset GL(E)$ est un sous-groupe compact et E ev. quelconque, alors il existe une structure euclidienne donnée par une forme quadratique q telle que $G \subset O(q)$.

Prop : Soit $F \subset E$ un sev stable par $\vec{f} \in O(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par $\vec{f}$.

Prop : Soit $f \in GL(E)$ une symétrie ($f^2 = id$). Alors il existe E^+ et E^- tq $E = E^+ \oplus E^-$ et $f_{|E^+} = id_{E^+}$, $f_{|E^-} = -id_{E^-}$. De plus $f \in O(E)$ ssi $E^+ \perp E^-$ et f est alors appelée symétrie orthogonale.

Déf : Lorsque $\dim E^- = 1$ on dit que f est une réflexion ($\dim E^- = 2$, renversement)

Prop : Les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotations)

Thm (réduction) Soit $f \in O(E)$. E est somme directe orthogonale $E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_l$

où V, W, P_i sont stables par C, $f_{|V} = id_V$, $f_{|W} = -id_W$, $f_{|P_i}$ rotation.

Naturellement : $Mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Corollaire : $SO(E)$ est connexe par arcs.

Thm Toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée d'au plus $n+1$ réflexions.

Corollaire : $SO_n(\mathbb{R})$ est simple pour n impair ≥ 3.

2. Une représentation de $SO_3(\mathbb{R})$ par les quaternions.

III. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES EN DIMENSION 2 ET 3

1. En dimension 2

Déf : On appelle réflexion glissée (ou symétrie) toute composée $\varphi = t_{\vec{u}} \circ s$ d'une réflexion orthogonale et d'une translation.

Inv	

IV. ISOMÉTRIES CONSERVANT UNE PARTIE

1. Généralités

Déf : Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{P}) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}),\ f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$

Thm : $(\mathrm{Is}(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe et $\mathrm{Isom}^{\pm}(\mathcal{P}) = \mathrm{Isom}(\mathcal{P}) \cap \mathrm{Isom}^{\pm}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe. De plus, si $s \in \mathrm{Isom}^{-}(\mathcal{P})$, l'application $\mathrm{Isom}^{+}(\mathcal{P}) \to \mathrm{Isom}^{-}(\mathcal{P})$, $f \mapsto s \circ f$ est une bijection.

Thm : Toute isométrie laissant une partie finie $\mathcal{P} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre des points $A_0, \dots, A_{n-1}$

Corollaire : Si $\mathcal{P}$ est une partie finie du plan de cardinal $n \geq 2$, $\mathrm{Isom}(\mathcal{P})$ est fini de cardinal $\leq 2n$.

2. Polygônes réguliers (en dimension 2)

Cadre : Dans le plan affine euclidien, on note $\mathcal{P}_n$ le polygône régulier à n sommets $A_0, \dots, A_{n-1}$ et O son isobarycentre.

Thm :

3. Groupes ponctuels

Leçon 162

Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Cette leçon est beaucoup plus drôle qu'il n'y parait, surtout si on parle du lemme d'Artin (d'ailleurs attention, il y a des énoncés faux dans le paragraphe qui suit) et des méthodes numériques de résolution (P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*).

Cette leçon a été réalisée en collaboration avec Gabriel Lepetit, keur sur lui.

I - THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES LINÉAIRES. [GOU] [GRI] [RDO]

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps. On cherche à résoudre $AX = b$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

Déf 1 : Le système est compatible lorsqu'il admet au moins une solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le rang du système est le rang de A.

1 - Systèmes de Cramer.

Déf 2. Lorsque $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on parle de système de Cramer.

Rem 3. Un système de Cramer admet une unique solution $X = A^{-1}b$.

Théorème 4. En notant $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, l'unique solution du système de Cramer $AX = b$ est donnée par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

Rem 5. Le calcul de la solution demande de l'ordre de $(n+1)!$ opérations.

Exemple 6 : Dans $\mathbb{R}$, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a :

$$x = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5 \; ; \; y = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; z = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

2 - Cas général - Théorème de Rouché-Fontené

Cadre : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $r \in \{1, \dots, \min(n,m)\}$ le rang du système.

Quitte à permuter et renuméroter les équations, on peut supposer que :

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Déf 7 : On appelle déterminants caractéristiques les déterminants :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,r} & b_s \end{vmatrix} \quad \text{pour } s \in \{r+1, \dots n\}$$

Théorème 8 (Rouché-Fontené). Le système est compatible si et seulement si $\Delta_s = 0$ pour tout $s \in \{r+1, \dots, n\}$. Dans ce cas, le système est équivalent à $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n \end{cases}$

Les solutions forment un espace affine de dimension $n-r$ et dépendent des paramètres $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{rang}(A) = 2$, le seul déterminant caractéristique est :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = -2(m+1)$. Le système admet des solutions ssi $m = -1$ et dans ce cas il est équivalent à $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$.

3 - Le cas des systèmes homogènes. [JL]

Cadre : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b = 0$.

Proposition 10. Si le système est de rang r, alors les solutions forment un espace vectoriel de dimension $n-r$.

Lemme 11. (Dedekind). (Un système) / une famille de r automorphismes de corps est toujours de rang r. **DÉVELOPPEMENT**

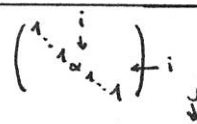
Lemme 12 (Artin). Soient $\mathbb{L}$ un corps et H un sous-groupe fini de $\operatorname{Aut}(\mathbb{L})$. Alors $\mathbb{L} / \mathbb{L}^H$ est une extension finie de degré $[\mathbb{L} : \mathbb{L}^H] = |H|$

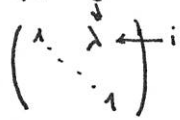
Corollaire 13. Sous les hypothèses du lemme d'Artin, $H = \operatorname{Aut}(\mathbb{L} / \mathbb{L}^H)$.

II - SUR LES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

1 - Définitions [RDO], [H2G2]

Déf 14 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices $p \times p$ dites élémentaires :

dilatation : $i \in \{1,\dots,p\}$, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, $D_i(\alpha) :=$ 

transvection : $i,j \in \{1,\dots,p\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{ij}(\lambda) :=$ 

permutation : $i,j \in \{1,\dots,p\}$, $P_{ij} =$ 

Proposition 15. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note L_i la i-ème ligne de $\mathbb{K}$. Si $p = m$, la multiplication à gauche par une matrice élémentaire donne :

opération	$D_i(\alpha)A$	$T_{ij}(\lambda)A$	$P_{ij}A$
résultat	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

idem sur les colonnes de A en multipliant à droite.

Lemme 16. Les matrices élémentaires sont inversibles avec :

$$D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad ; \quad T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda) \quad ; \quad P_{ij}^{-1} = P_{ji} \ .$$

Théorème 17.
- Les matrices de transvections de taille n engendrent $SL_n(\mathbb{K})$.
- Les matrices de transvection et de dilatation de taille n engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.

Application 18 : $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.
$GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs :
$GL_n^+(\mathbb{R}) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) := GL_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n^+(\mathbb{R})$.

2. L'algorithme du pivot de Gauss [RDO], [ALL]

Lemme 19. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ à première colonne non nulle peut être transformée par multiplication à gauche par des transvections en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \beta & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{m-1,n-1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe $M \in GL_n(\mathbb{K})$ qui est un produit de matrices de transvection triangulaires supérieures et de matrices de permutation telle que $T := MA$ soit triangulaire supérieure.

Algorithme 21. Pour p de 1 à n faire :
- si $a_{pp} \neq 0$, annuler les $a_{j,p}$, $j > p$ en multipliant par $T_{jp}\left(-\frac{a_{jp}}{a_{pp}}\right)$
- si $a_{pp} = 0$, permuter $L_p \leftrightarrow L_j$, $j > p$ telle que $a_{j,p} \neq 0$. Si une telle ligne n'existe pas, passer à l'étape suivante.

Application 22 : Avec les notations précédentes, le système $AX = b$ est équivalent à $TX = Mb$.

Application 23 (Bruhat). $\mathcal{T}_S$ désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles sur $\mathbb{K}^n$. On a : $GL_n(\mathbb{K}) = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{T}_S P_\sigma \mathcal{T}_S$. [FGN]

Rem 24 : L'algorithme du pivot de Gauss nécessite $O(n^3)$ opérations.

3. En termes d'actions de groupe [H2G2]

Cadre : Étudier les orbites de l'action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche.

Déf. 25. Dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on appelle pivot d'une ligne le coefficient non nul (s'il existe) situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée réduite. Lorsqu'elle vérifie les conditions :
- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que ceux des lignes précédentes
- tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Exemple 26 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.

NOTATION : On note $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble des matrices échelonnées réduites de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Théorème 27. Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. A et A' sont dans la même orbite pour l'action par multiplication à gauche ssi $\ker A = \ker A'$
On a : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \coprod_{E \in \mathcal{E}_{m,n}} \mathcal{O}rb(E)$.

Rem. 28 : On peut conduire la même étude pour l'action par multiplication à droite.

4- Sur un anneau euclidien. [BMP]

Lemme 29. Soit A un anneau euclidien et $M \in \mathcal{M}_n(A)$. Il existe δ un pgcd des éléments de M et $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(A)$ tels que M soit équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} \delta & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \delta M' & \\ 0 & & \end{pmatrix}$.

Théorème 30. Soit A un anneau euclidien. Soient L un A-module de rang n et $R \subset L$ un sous A-module. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de L (base adaptée) et $(d_1, \dots, d_k) \in A^k$ tels que $d_1 | d_2 | \cdots | d_k$ et $(d_1 e_1, \dots, d_k e_k)$ est une base de R.

Application 31. Classification des groupes abéliens finis.

III - RÉSOLUTION EFFECTIVE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Proposition 32. La résolution d'un système triangulaire supérieur demande $O(n^2)$ opérations.

Définition 33. Le conditionnement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ relativement à la norme subordonnée $\|\cdot\|$ est $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$

Proposition 34. Si $Ax = b$ et $A(x+\delta x) = b + \delta b$, alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Si $(A+\delta A)(x+\delta x) = b$, alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$.

Ces inégalités sont optimales.

1- Méthodes directes [ALL], [CiA], [QSS]

Cadre : Solution "exacte" en un nombre fini d'étapes.

Théorème 35 (LU) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que tous ses mineurs principaux soient non nuls. Il existe un unique couple (L,U) avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure ayant une diagonale de 1 tel que $A = LU$. Le calcul est explicite par l'algorithme de Gauss "sans permutes".

Application 36 : $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$. Il y a $O(n^3)$ opérations.

Déf. 37 : Une matrice A est dite bande $p \in \mathbb{N}$ lorsque $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$.

Proposition 38 : La factorisation LU conserve la structure bande des matrices.

Application 39 : Factorisation LU d'une matrice tridiagonale en $O(n)$ opérations.

Théorème 40 (QR) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Il existe $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ unitaire et $R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = QR$.

Application 41. Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^* b$.

Rem 42 : On peut obtenir la factorisation QR par l'algorithme de Gram-Schmidt

2- Méthodes itératives, épisode 1 [CiA] DÉVELOPPEMENT

Cadre : Construire une suite $(x_k)_k$ qui converge vers la solution de $Ax = b$.

Théorème 43. Si $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \end{cases}$ converge vers x tq $Ax = b$ ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Exemples 44. En particulier, sont utilisées :

- Méthode de Jacobi : $M = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = D$ et $N = D - A$.
- Méthode de Gauss-Seidel : $\begin{vmatrix} M = D - E \\ N = F \end{vmatrix}$ où $\begin{vmatrix} E = -A_{inf} \\ F = -A_{sup} \end{vmatrix}$ ↗ parties triangulaires sup et inf strictes.
- Méthode SOR : $M = \frac{D}{\omega} - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$, $\omega \in \mathbb{C}$.

But : trouver ω optimal pour converger plus rapidement.

3- Méthodes itératives, épisode 2 : méthodes de gradient. [LAX], [QSS]

Cadre : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 45 : La solution de $Ax = b$ minimise $E(y) = \frac{1}{2}\langle y, Ay \rangle - \langle y, b \rangle$.

Définition 46. On appelle méthode de gradient une méthode itérative de la forme : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ où $\alpha_k = \frac{\langle d_k, r_k \rangle}{\|d_k\|_A^2}$ où $r_k = b - Ax_k$ et $\|\cdot\|_A^2 = \langle \cdot, A\cdot \rangle$

Théorème 47 : $\|x_{k+1} - x_k\|_A^2 = (1 - \sigma_k)\|x_k - x\|_A^2$ où $\sigma_k = \frac{\langle d_k, r_k \rangle}{\|d_k\|_A^2 \|r_k\|_{A^{-1}}^2} \in [0,1]$

Exemples 48. En particulier, sont utilisées :

- Gradient pas optimal : $d_k = r_k$ alors $\|x_k - x\| \leq \mathrm{cond}(A) \left(\frac{\mathrm{cond}A - 1}{\mathrm{cond}A + 1}\right)^k \|x_0 - x\|$
- Gradient conjugué : $d_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k d_k$ où $\beta_k = \frac{\langle r_{k+1}, Ad_k \rangle}{\|d_k\|_A^2}$.

Théorème 49 : La méthode de gradient conjugué converge en au plus n itérations vers x.

ANNEXE : ILLUSTRATIONS POUR LES MÉTHODES DE GRADIENT

On représente les courbes de niveau de $E(y) = \frac{1}{2}\langle y, Ay\rangle - \langle y, b\rangle$.

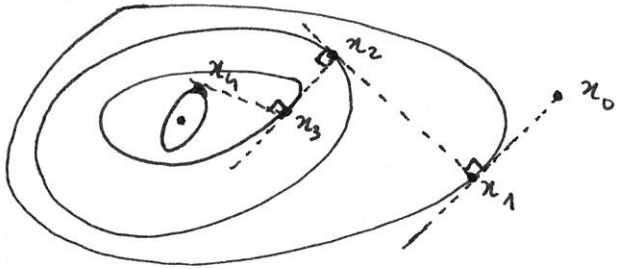


Figure 1 : Gradient à pas optimal



Figure 2 : Gradient à pas optimal : une mauvaise situation.

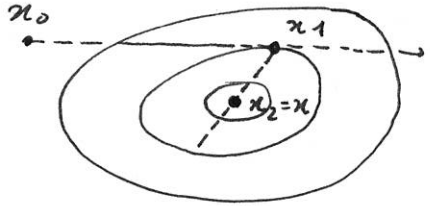


Figure 3 : Gradient conjugué en dimension 2.

BIBLIOGRAPHIE

[ALL] Grégoire ALLAIRE, Analyse numérique et optimisation, 2e édition

[BMP] V. BECK, J. MALICK, G. PEYRÉ, Objectif Agrégation

[H2G2] P. CALDERO, J. GERMONI, Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, T.1

[CIA] P.G. CIARLET, Introduction à l'Analyse numérique matricielle

[GOU] X. GOURDON, Les maths en tête : Algèbre

[GRI] J. GRIFONE, Algèbre Linéaire, 4e éd.

[JL] A. JEANNERET, D. LINES, Invitation à l'algèbre

[LAX] P.D. LAX, Linear Algebra and its Applications, 2nd ed.

[QSS] A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI, Numerical Mathematics

[RDO] E. RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX, Cours de Maths. Spéciales T.1.

Antoine DIEZ
Gabriel LEPETIT

Leçon 170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le Gourdon contient plein de trucs. Le gros livre de Clément de Seguin-Pazzis aussi mais il est gros. La première partie ne sert à rien.

Ce plan est un peu bof je pense.

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Isotropie - Applications.

I- GÉNÉRALITÉS.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n où $\mathbb{K}$ corps de caractéristique $\neq 2$.

1- Formes quadratiques vues comme polynôme homogène

Déf: Étant donnée une base $\{e_i\}$ de E, une forme quadratique $q: E \to \mathbb{K}$ est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées.

Exemple: Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 + y^2$ est une forme quadratique.

Théorème (Gauß - version analytique). Soit q une forme quadratique sur E. Il existe n formes linéaires indépendantes telles que :

$$q(x) = a_1 \varphi_1(x)^2 + \dots + a_n \varphi_n(x)^2, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}.$$

De plus, il existe un algorithme explicitant la matrice de passage $(e_1^*, \dots, e_n^*) \to (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Exemple: $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3 = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

2- Formes bilinéaires et formes quadratiques

Déf: Une application bilinéaire $f: E \times E \to \mathbb{K}$ est une application vérifiant : (1) Pour tout $y \in E$, $x \mapsto f(x,y)$ linéaire (2) $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x,y)$ linéaire.

On dit que f est symétrique lorsque $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = f(y,x)$.

Déf: Étant donnée une base $\{e_i\}$ de E, on appelle matrice de la forme bilinéaire symétrique, la matrice $A = (f(e_i, e_j))_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Proposition: Si $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien canonique relativement à la base $\{e_i\}$, on a pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$f(x,y) = \langle x, Ay \rangle = {}^t x A y.$$

Proposition: • Si f est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors $q: E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x,x)$ est une forme quadratique

• Si q est une forme quadratique sur E, alors l'application $f: E \times E \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition: L'application $q \mapsto f$ ainsi définie est une bijection.

Déf: f s'appelle la forme polaire de q.

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 + 2xy - 4xz - y^2 + 6yz - z^2$ est la forme quadratique associée à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Déf: Si q est une forme quadratique, on appelle rang/noyau de q et on note $rg(q)$ / $\ker q$ le rang et le noyau de la matrice de la forme polaire associée à q.

Déf. On appelle congruence l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ définie par $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $(P, A) \mapsto PA^tP$.

Prop: Deux matrices $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont congruentes ssi leurs formes quadratiques associées diffèrent d'un changement de base.

Déf : On appelle déterminant d'une forme quadratique la classe du déterminant de la matrice de sa forme polaire dans $\mathbb{K}/\mathbb{K}^2$.
On note $\delta(q)$.

II - ORTHOGONALITÉ, ISOTROPIE

q est une forme quadratique de forme polaire f.

1 - Orthogonalité

Déf : Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux lorsque $f(x,y) = 0$. Deux parties A et B de E sont orthogonales lorsque $\forall x \in F, \forall y \in G, f(x,y) = 0$.

Déf : L'orthogonal d'une partie $F \subset E$ est $F^\perp := \{x \in E, \forall y \in F, f(x,y) = 0\}$

Proposition : Soient $F, G \subset E$. Alors :
(i) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\ker q$.
(ii) $F^\perp = (\mathrm{Vect}\, F)^\perp$ (iii) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
(iv) Si F est un sous-espace vectoriel de E, $F \cap F^\perp = \ker f_{|F}$
(v) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ (vi) $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Exemple : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour la forme bilinéaire $(X,Y) \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

2 - Dégénérescence et isotropie

Déf : q est dite dégénérée lorsque $\ker q \neq \{0\}$.

Déf / Prop : Soit F un sous-espace de E. F est dit :
- régulier lorsque $q_{|F}$ non dégénérée i.e. $F \cap F^\perp = \{0\}$ i.e $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$
- isotrope lorsque $q_{|F}$ dégénérée i.e. $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
- totalement isotrope lorsque $q_{|F} = 0$ i.e. $F \subset F^\perp$.

Déf : q est dite isotrope lorsque $C_0(q) := \{x \in E, q(x) = 0\} \neq \{0\}$.
q est dite régulière sinon.
Rem : On a $\ker q \subset C_0(q)$. Réciproque fausse : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déf : $C_0(q)$ est appelé cône isotrope de q.

Prop : Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors : si f est régulière, on a :
(i) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ (ii) $\dim F^\perp = n - \dim F$ (iii) $(F^\perp)^\perp = F$

Prop : La forme quadratique $\bar{q}$ sur $E/\ker q$ est régulière

Exemple : La partie régulière de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est isomorphe à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

3 - Application à la réduction de Gauss

Déf : On appelle base orthogonale de E toute base composée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Prop : Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une famille constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux. Alors cette famille est libre et on peut la compléter en une base orthogonale.

Prop : Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est telle que tous les mineurs principaux Δ_k sont non nuls, alors A est congruente à $\mathrm{diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$.

Prop : Si T est la matrice de passage de $(e_1^*, \dots, e_n^*) \to (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ comme dans la réduction de Gauss analytique, alors une base orthogonale pour q est donnée par ${}^tT^{-1}$.

Théorème (Spectral). Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E. Il existe une base orthonormée pour q_1 qui est une base orthogonale pour q_2.

Application : Ellipsoïde de John et Loewner.

III - CLASSIFICATION DES FORMES QUADRATIQUES

1 - Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Déf : On dit que q est définie positive sur E lorsque $q(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $q > 0$

Déf : On note $p_+(q) = \max\{\dim S,\ q|_S > 0\}$.

Théorème (Sylvester). Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A et A' sont congruentes ssi $rg(A) = rg(A')$ et $p_+(A) = p_+(A')$.

Déf On appelle signature de q le couple (r,s) où r est le nombre de coefficients positifs strictement dans la réduction de Gauss et s le nombre de coefficients strictement négatifs.

Prop : $rg(q) = r+s$.

Prop : Si $q > 0$, on a $\forall x, y \in E^2$, $f(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$ avec égalité ssi (x,y) est liée.

Prop : Si $q > 0$, on a $\forall (x,y) \in E^2$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

Prop : Si $q > 0$, on a $C_0(q) = \ker q$.

2 - Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$

Théorème : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le rang est un invariant complet pour l'action par congruence.

Théorème : Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, il y a deux classes de congruence : celle de $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et celle de $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$.

IV - GROUPE ORTHOGONAL D'UNE FORME QUADRATIQUE

Déf : Le groupe orthogonal d'une ~~matrice~~ forme quadratique est le stabilisateur $\mathrm{Stab}(A) = \{P \in GL_n(\mathbb{K}),\ PA^tP = A\} =: O(q)$

Notation : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q de signature (r,s), on note $O(r,s)$ le groupe orthogonal de $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déf : On appelle isométries les éléments de $O(q)$ et on a :
$O(q) = \{u \in GL_n(\mathbb{K}),\ \forall x, y \in E,\ f(u(x), u(y)) = f(x,y)\}$.

Théorème (décomposition polaire) On a un homéomorphisme :
$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \mapsto OS$.
où $O_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe orthogonal de I_n : $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tPP = I_n\}$.

Théorème : On a un homéomorphisme : $O(r,s) \cong O_r(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{rs}$.

Déf (groupe spécial orthogonal)

V - APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE.

1. Classification des quadriques réelles.

Déf: On appelle quadrique réelle l'ensemble des zéros de $q + \varphi - k$ où $\begin{cases} q \text{ forme quadratique sur } \mathbb{R}^3 \\ \varphi \text{ forme linéaire sur } \mathbb{R}^3 \\ k \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Théorème : Il y a 15 quadriques réelles selon la signature de q.

2. Lemme de Morse.

Lemme (Morse). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^k, $k \geq 3$ telle que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée. Alors, au voisinage de 0, il existe un C^{k-2} difféomorphisme φ tel que si q_0 désigne la forme quadratique associée à $d^2f(0)$, on a :

$\forall x \in \mathcal{V}$, $f(x) = q_0(\varphi(x))$.

Leçon 181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

La première partie est tirée du livre de M. Audin et du *Cours de Mathématiques Spéciales* de Ramis, Deschamps, Odoux. La deuxième partie est intégralement recopiée sur Eiden, *Géométrie analytique classique*. Les troisième et quatrièmes parties sont sûrement issues d'un des livres de Hirriart-Urruty et Lemaréchal.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dim. finie, convexité. Applications

I. BARYCENTRES ET ESPACES AFFINES

1. Définitions. [Audin], [RDO2]

Déf (Espace affine) On appelle espace affine un ensemble $(\mathcal{E}, E, \theta)$ où E est un espace vectoriel et $\theta : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to E$, $(A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que
- $\forall A \in \mathcal{E}$, $\theta_A : \mathcal{E} \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective
- $\forall A,B,C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Déf° (Repère affine) : Un repère affine de $\mathcal{E}$ est la donnée de $(A_0,\dots,A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ tels que $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de E. n est la dim. de $\mathcal{E}$.

Déf° (Application affine) Soient $(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines. On dit que $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine lorsqu'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $f : E \to F$ linéaire telle que $\forall M \in \mathcal{E}$, $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$. Rem : f ne dépend que de φ et pas de O

Déf° (Barycentre) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires. On pose $\sigma = \sum_{i\in I} \alpha_i$.
Si $\sigma \neq 0$ alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$
On l'appelle barycentre de la famille $((A_i)_{i\in I}, (\alpha_i)_{i\in I})$.
Pour tout $O \in \mathcal{E}$, il vérifie $\overrightarrow{OG} = \sigma^{-1} \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.

Rem : À partir de maintenant toute famille de points pondérés sera implicitement supposée de masse 1 : $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$

Déf (Coordonnées barycentriques) Étant donnée une ~~famille~~ repère affine $(A_i)_{i\in I}$, ~~(scalaires)~~ ~~de points pondérés~~ de $\mathcal{E}$, il existe pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une unique $(n+1)$-uplet tel que M soit le barycentre des $\{A_i, \alpha_i\}$. Ce $(n+1)$-uplet forme les coordonnées barycentriques de M.

2. Propriétés.

Propriétés. 1) Le barycentre est commutatif au sens où il ne dépend pas de l'indexation de la famille $\{A_i, \alpha_i\}_{i\in I}$.
2) Le barycentre est associatif au sens où si $I = \coprod_{j\in J} I_j$ avec pour tout $j \in J$, $\sum_{i\in I_j} \alpha_i \neq 0$, alors
$\text{Barycentre}(\{A_i, \alpha_i\}_{i\in I}) = \text{Bar}(\{G_j, \sum_{i\in I_j} \alpha_i\})$ où $G_j = \text{Bar}\{A_i, \alpha_i\}_{i\in I_j}$.

Déf (isobarycentre) On appelle isobarycentre de $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ le barycentre de $\{A_i, \frac{1}{n}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$
Lorsque $n=2$, on parle de milieu du bipoint (A_0, A_1).

Théorème. $ABCD$ est un parallélogramme ssi (A,C) et (B,D) ont même milieu.

Théorème. Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement s'il elle conserve le barycentre.

II - APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DANS UN PLAN AFFINÉ (bilan)

On fixe à partir de maintenant un "triangle de référence" (A_0, A_1, A_2) du plan $\mathcal{P}$, c'est à dire un repère affine.

Si $M \in \mathcal{P}$, alors on a deux manières de le repérer :

- coordonnées affines (u,v) telles que $\overrightarrow{A_0M} = u\overrightarrow{A_0A_1} + v\overrightarrow{A_0A_2}$
- coordonnées barycentriques (x,y,z) telles que $x\overrightarrow{A_0M} + y\overrightarrow{A_1M} + z\overrightarrow{A_2M} = \vec{0}$

On a $(x,y,z) = (1-u-v, u, v)$ et $(u,v) = \left(\frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$.

~~1 - Coordonnées barycentriques de points remarquables~~

Rem 1 - Géométrie barycentrique

Aire : Les coordonnées barycentriques de M relativement à un triangle de référence (A,B,C) sont proportionnelle au triplet des aires orientées $(\mathcal{A}(BCM), \mathcal{A}(CAM), \mathcal{A}(ABM))$.

Application : Trouver le point K intérieur au triangle ABC tel que $d_A^2 + d_B^2 + d_C^2$ soit minimal. (Point de Lemoine).



- $a d_A + b d_B + c d_C = 2S$
  → coordonnées barycentriques $(a d_A, b d_B, c d_C)$
- $(d_A, d_B, d_C) = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$.

Droites et alignement. Prop : Les droites affines sont l'ensemble des parties ayant une équation barycentrique $aX+bY+cZ=0$, a,b,c non tous nuls.

Prop : Équation barycentrique de la droite (M_1M_2) : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$.

2. Coordonnées barycentriques remarquables

- Isobarycentre : (1, 1, 1) (intersection des médianes)
- Centre du cercle inscrit (a, b, c) (intersection des bissectrices)
- Centre du cercle circonscrit ($\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$) (intersection des médiatrices)
- Orthocentre ...

3. Théorèmes de Céva et Ménélaüs

III - CONVEXITÉ

Déf (segment). Le segment $[A,B] \subset \mathcal{E}$ est l'ensemble des barycentres $(1-t)A + tB$ où $t \in [0,1]$.

Déf (partie convexe). Pour toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$, il y a équivalence entre :

- $\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2$, $[A,B] \subset \mathcal{C}$
- Tout barycentre à coefficients positifs appartient à $\mathcal{C}$.

On l'appelle partie convexe dans ce cas. [RDO]

Théorème : L'intersection d'une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Déf : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Il existe une et une seule plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ et on la note $\mathrm{Conv}\,\mathcal{A}$.

Théorème : $\mathrm{Conv}\,\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.

Exemple : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les zéros de P' appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de P (Gauss-Lucas).

Théorème (Carathéodory) Dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres à coef positifs de au plus $(n+1)$ points de A.

Application : Dans un espace affine de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte. (Alessandri).

Application : Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe une forme quadratique q^G telle que $G \subset O(q^G)$.

Théorème (Helly). Si $\{K_1, \dots, K_N\}$ est une famille de N convexes dans un espace affine de dim. n est telle que toute sous-famille de $(n+1)$ éléments a une intersection non vide, alors $\bigcap_{i=1}^{N} K_i \neq \emptyset$.

Application :

IV. CONVEXITÉ ET DUALITÉ

Théorème. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{E}$ et $x \notin \mathcal{E}$. Alors il existe un hyperplan affine qui sépare strictement x et C.

Déf. Un hyperplan d'appui à un convexe fermé C est un hyperplan affine H tel que C soit contenu dans un demi-plan de frontière H et tel qu'il existe $x \in \partial C \cap H$.

Proposition. Soit C un convexe non vide de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui à C en x.

Application : Un point extrémal d'un convexe non vide de $\mathcal{E}$ est un point $x \in C$ tel que $\forall x_1, x_2 \in C, \forall t \in (0,1), \left[x = (1-t)x_1 + t x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2\right]$

Théorème (Krein-Milman) : Soit C un compact convexe de $\mathcal{E}$ non vide. C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Théorème (Birkhoff). L'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation.

Citer Hahn-Banach (au moins géométrique)

Leçon 182

Applications des nombres complexes à la géométrie.

No comment.

Voir Eiden, *Géométrie analytique classique* notamment.

Applications des nombres complexes à la géométrie
[Eiden]

I - GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

1) Définitions

Déf 1. On appelle affixe du point $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le complexe $z = x+iy$. On note $M(z)$ le point M.

Proposition 2. Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique $z = |z| e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Proposition 3. Soient M_1 et M_2 deux points de $\mathbb{R}^2$ d'affixes respectives z_1 et z_2, ou de façon équivalente deux vecteurs v_1, v_2. Alors.
- longueur du segment $[M_1M_2] = |z_1 - z_2|$
- Produit scalaire $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$
- Produit mixte $[v_1, v_2] = \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)$

2) Une construction de $\mathbb{C}$ [H2G2 p.227].

On peut définir $\mathbb{C}$ comme le sous-anneau engendré par le groupe des rotations $SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2 = 1 \right\}$.

Déf 4. $\mathbb{C} = \mathbb{R} SO(2,\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^* SO(2,\mathbb{R})$.

Prop 5 : $\mathbb{C}$ est une sous-alg commutative et tout élément non nul est inversible.

Prop 6 : $\mathbb{C}$ est engendré par $\mathbb{R}_+^* Id$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Reformulation des objets usuels en géométrie plane

Prop. 7. 1. Toute droite affine admet une équation de la forme $\bar{A}z + A\bar{z} + B = 0$ où $A \in \mathbb{C}^*$, $B \in \mathbb{R}$.

2. le cercle $\mathcal{C}$ de centre $M(\omega)$ et de rayon r admet pour équation $\bar{z}z - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \bar{\omega}\omega (= |z-\omega|^2) = r^2$

3. L'équation générale d'une conique est de la forme
$$A z\bar{z} + \bar{B} z^2 + B\bar{z}^2 + \bar{C}z + C\bar{z} + D = 0$$
A, B, C : $A, D \in \mathbb{R}$ et $(A,B) \neq (0,0)$.

4) Quelques transformations usuelles. (Audin p 110)

Proposition 8. Les isométries planes s'écrivent en nombres complexes.

translation	rotation	réflexions	symétries glissées
$z \mapsto z+b$, $b \in \mathbb{C}$	$z \mapsto az+b$, $\lvert a\rvert = 1$, $a \neq 1$	$z \mapsto a\bar{z}+b$, $\lvert a\rvert = 1$, $a\bar{b}+b = 0$	$z \mapsto a\bar{z}+b$, $\lvert a\rvert = 1$, $a\bar{b}+b \neq 0$

Proposition 9. (Audin p.93) Les similitudes sont les applications de la forme $z \mapsto az+b$. Le rapport est $|a|$ et l'angle $\arg a$.

Application 10. Il existe une similitude directe s de centre A envoyant B sur B' et C sur C' si et seulement il existe une similitude directe s' de centre A envoyant B sur C et B' sur C'.

Définition 11 Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle inversion analytique de pôle a et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ l'application qui à z associe z' tel que $(z'-a)(z-a) = k$. [Eiden p. 245] géométrique : $(z'-a)\overline{(z-a)} = k$.

Rem. 12. Ce sont des homographies. Cette notion sera définie plus tard.

II - PREMIÈRES APPLICATIONS.

1) La géométrie du triangle. [Eiden]

Proposition 13 Un triangle dont les affixes des sommets sont a, b, c est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ où $j = e^{2i\pi/3}$

Proposition 14. L'aire du triangle (orienté) dont les sommets ont pour affixes a, b, c est donnée par $\mathcal{A} = \frac{1}{4i}\left((a-b)\bar{c} + (b-c)\bar{a} + (c-a)\bar{b}\right)$.

Proposition 15. Le centre de gravité d'un triangle a pour affixe $\frac{a+b+c}{3}$. et l'orthocentre $a+b+c$.

Application 16. On retrouve la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

2) Le théorème de Ptolémée (Eiler)

Théorème 17. Un quadrilatère convexe ABCD est inscriptible dans un cercle si et seulement si $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$

L'inégalité $\leq$ se prouve en passant aux complexes et le résultat découle de l'étude du cas d'égalité.

3) Polynômes et barycentres

Déf 17 (barycentre) $z = \frac{1}{n}(z_1 + \dots + z_n)$.

Prop. 17 (Gauss-Lucas).

(cf F. Lemmermeyer, A-Lavrenk)

Prop. 18 Ellipse de Steiner

4) Polygônes

Proposition 18. Les racines n-èmes de l'unité sont les sommets d'un n-gône régulier.

Définition 19. Le n-ème polynôme cyclotomique est défini par

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \wedge n}} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

Théorème 20 (Gauss-Wantzel) Le n-gône régulier est constructible à la règle et au compas si et seulement si $n = 2^m p_1 \dots p_n$ où $m \in \mathbb{N}$ et p_i sont des nombres de Fermat premiers distincts.

Ce théorème découle des résultats suivants de théorie des corps :

Théorème 21 (Wantzel) Un point $t \in \mathbb{R}$ est constructible à la règle et au compas ssi il existe une suite finie $K_0, K_1, \dots, K_p$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :
(i) $K_0 = \mathbb{Q}$ (ii) K_{i+1} est une extension quadratique de K_i (iii) $t \in K_p$

Théorème 22 Le polynôme minimal de $\omega = e^{2i\pi/n}$ sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n et $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

II - GÉOMÉTRIE PROJECTIVE COMPLEXE : LA SPHÈRE DE RIEMANN

1) Définition

On considère $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la droite projective complexe.

Déf° 23 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \text{colinéarité}$.

Proposition 24. La projection stéréographique donne un difféo-morphisme entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

On parlera donc de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme de la "sphère de Riemann".

NOTATION 25. On notera aussi $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2) Homographies

Déf 26. Soit $\varphi \in GL_2(\mathbb{C})$. Il existe un unique morphisme $\mathbb{P} : GL_2(\mathbb{C}) \to$ Bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ faisant commuter le diagramme pour tout $\varphi \in GL_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\mathbb{P}(\varphi)]{} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

On définit $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}\,\mathbb{P}$

$\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ s'appelle l'ensemble des homographies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Proposition 27. $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C}) \cong \dfrac{GL_2(\mathbb{C})}{\mathbb{C}^* \cdot Id}$

Proposition 29. $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ où $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C}) = \dfrac{SL_2(\mathbb{C})}{(\mathbb{C}^* \cdot Id) \cap SL_2(\mathbb{C})}$

Déf° 29. On définit l'ensemble des homographies sur $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{Homogr}(\mathbb{C}) := \left\{ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ ab - cd \neq 0,\ z \neq -\frac{d}{c} \right\}.$$

Proposition 30. $\mathrm{Homogr}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ par le morphisme

$$\tau : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Homogr}(\mathbb{C}),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left| h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right.,\ \ker \tau = \mathbb{C}^* \cdot Id$$

Notation 31 : $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et si $z = -\frac{d}{c}$, $h(z) = \infty$.

(Au début)

Proposition 32. $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes $z \mapsto az+b$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$

Proposition 33. $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ conserve les angles orientés.

Proposition 34. Deux homographies qui coïncident en trois points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont égales.

3) Des cercles et des droites

Définition 35. On appelle cercle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ soit { - un cercle de $\mathbb{C}$ (non réduit à un point) ; - une droite de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ }

Proposition 36. $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur la famille des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Définition 37. Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^3$ trois points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On note h l'unique homographie telle que $h(x_1) = \infty$; $h(x_2) = 0$; $h(x_3) = 1$. Soit $x_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le birapport du quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) est défini par $[x_1, x_2, x_3, x_4] = h(x_4)$.

Proposition 38. $[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \dfrac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$.

Proposition 39. Si $\varphi \in \mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$, $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)]$. De plus si $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1', x_2', x_3', x_4']$ alors il existe une unique homographie envoyant (x_1, x_2, x_3, x_4) sur (x_1', x_2', x_3', x_4').

Théorème 40. (Möbius) Sont équivalents (1) x_1, x_2, x_3, x_4 sont cocycliques (ou alignés) (2) $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}$.

Définition 41. (Artin) On appelle groupe circulaire le groupe des transformations de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ engendré par $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Théorème 42. Les éléments de G sont les transformations qui préservent les cercles de $\mathbb{C}$.

IV. DANS LE MÊME ESPRIT : LES QUATERNIONS. [H2G2]

1) Définitions.

On note $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+^* SU(2, \mathbb{C}) \cup \{0\}$ l'algèbre des quaternions.

Prop° 43 En tant qu'espace vectoriel réel, $\mathbb{H}$ est de dim 4 et admet pour base $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Déf 44. $\mathbb{H}$ est l'algèbre de dim 4 sur $\mathbb{R}$ ayant pour base $(1, i, j, k)$ où la multiplication est définie par $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ijk = -1$.

Prop. 45. C'est une algèbre à division non commutative.

Déf°. 46 Soit $h = x + yi + zj + tk$. On définit :
- $\bar{h} = x - iy - zj - tk$ (le conjugué de h)
- $N(h) = h\bar{h} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (la norme de h)

Déf 47. $\mathbb{I} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ les imaginaires de $\mathbb{H}$.

Prop. 48.
- $h \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h = \bar{h}$ et $h \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \bar{h} = -h$
- Le centre de $\mathbb{H}$ est réduit à $\mathbb{R}$.

2) Des rotations dans $\mathbb{R}^3$

Prop 49. $N(h)$ est une forme quadratique réelle déf pos. pour laquelle $(1, i, j, k)$ est orthonormée. $\mathbb{I}$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}$.

Prop. 50. $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \dfrac{SU_2(\mathbb{C})}{\{\pm 1\}}$.

« Le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ est isomorphe au groupe des quaternions de norme 1 ».

Leçon 183

Utilisation des groupes en géométrie.

Comme toutes les leçons de géométrie, j'ai principalement recopié le livre de M. Audin et celui de D-J. Mercier. Le livre de M. Berger est sans doute très bien mais un peu compliqué pour moi. J'aime pas trop la géométrie alors c'est sans doute pas terrible.

183 - Utilisation des groupes en géométrie -

I- GÉOMÉTRIE AFFINE-

1- Espace affine, application affine -

Déf (espace affine) Un espace affine est une action de groupe fidèle et transitive notée $(X, \vec{X}, \Phi)$ où $\vec{X}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel considéré avec sa structure de groupe additif. $\vec{X}$ est l'espace vectoriel sous-jacent à X

Not: $M \in X$, $\vec{x} \in \vec{X}$, $\Phi(\vec{x}, M) = M + \vec{x}$

Déf L'application $\Phi(\vec{x}, .) : X \to X$ est appelée translation de vecteur $\vec{x} \in \vec{X}$ et notée $t_{\vec{x}}$

Prop: Il existe $\Theta : (X \times X) \to \vec{X}$ tel que $N = \Phi(\Theta(M,N), M)$ pour tous $M, N \in X$. On note $\Theta(M,N) = \overrightarrow{MN} = N - M$. Θ vérifie:

(1) $\forall M \in X$, $\Theta_M : N \in X \longmapsto \overrightarrow{MN}, \in \vec{X}$ est bijective.

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ pour tous $A, B, C \in X$

Déf: On appelle dimension de X la dimension de $\vec{X}$.

Déf: Si $A \in X$, on note X_A l'ensemble X doté d'une structure d'espace vectoriel telle que $\Theta_A : X \to \vec{X}$ soit un isomorphisme d'ev. On dit que X_A est le vectorialisé de X en A.

Déf (repère affine). Si X est de dimension n, on appelle repère affine de X la donnée de $n+1$ points $\{A_0, \dots, A_n\}$ tels que $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ soit une base de $\vec{X}$ (i.e. $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une base du vectorialisé en A_0, X_{A_0}).

2- Le groupe affine

Déf (application affine) Soient $(X, \vec{X}, \Theta)$ et $(Y, \vec{Y}, \Theta')$ deux espaces affines. Il y a équivalence entre:

(1) $f \in \mathcal{L}(X_A, Y_{f(A)})$ pour $A \in X$ (2) $f \in \mathcal{L}(X_A, Y_{f(A)})$ pour tout $A \in X$

(3) $\Theta_{f(A)} \circ f \circ \Theta_A^{-1} \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ pour $A \in X$

(4) $\Theta_{f(A)} \circ f \circ \Theta_A^{-1} \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ pour tout $A \in X$

Dans ce cas on dit que f est une application affine et on note $\vec{f} = \Theta_{f(A)} \circ f \circ \Theta_A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. On note $Aff(X,Y)$ l'ensemble des app° affines.

On a: $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$

Ex: Les translations: $t_{\vec{x}}(M) = M + \vec{x}$; $\vec{t_{\vec{x}}} = id_{\vec{X}}$. Réciproquement, les $f \in Aff(X)$ telles que $\vec{f} = id_{\vec{X}}$ sont les translations.

Ex: Les homothéties $f : M \in X \longmapsto \lambda \overrightarrow{AM}$ où $A \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ est une application affine et $\vec{f}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

Thm: Les applications affines sont celles qui conservent le barycentre.

Prop: La composée de deux applications affines f et g est une application affine d'app lin. associée $\vec{f} \circ \vec{g}$. f est bijective ssi $\vec{f}$ l'est et $\vec{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$

Corol/Déf: Les bijections affines $\vec{x} \to \vec{x}$ forment un groupe appelé groupe affine et noté $GA(X)$.

Prop: On a un morphisme surjectif $GA(X) \to GL(\vec{X})$, $f \longmapsto \vec{f}$ et son noyau est formé des translations de X. D'où la suite exacte

$$\{id\} \to \gamma \xrightarrow{i} GA(X) \xrightarrow{L} GL(\vec{X}) \to \{id\}$$

où s est une section de L définie par: si $u \in GL(\vec{X})$, $s(u)$ est l'unique application affine $t_{\vec{v}} \circ f$ qui fixe O et u est la partie linéaire de $s(u)$.

Corollaire: Toute application affine se décompose de manière unique $t_{\vec{v}} \circ f$ où f fixe O. De plus $GA(X) \simeq \vec{X} \rtimes GL(\vec{X})$

3. Application en géométrie : Le théorème de Pappus -

II. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

1- Isométries vectorielles, isométries affines

Déf : On appelle espace affine euclidien $\mathcal{E}$ un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent E est un espace euclidien : $(E, \langle,\rangle, \|\cdot\|)$.

Prop : Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ (linéaire). Il y a équivalence entre (1) $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\|f(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in E$ (2) $\forall x,y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
f est alors appelé isométrie, f est bijective. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries. Via le choix d'une base $\mathcal{O}(E) \simeq \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Prop : $\mathcal{O}(E)$ est un groupe appelé groupe orthogonal, il a deux composantes connexe $\mathcal{O}^+(E) = \{f \in \mathcal{O}(E), \det f = 1\}$ et $\mathcal{O}^-(E) = \{f \in \mathcal{O}(E), \det f = -1\}$
$\mathcal{O}^+(E)$ est le groupe des rotations. On le note aussi $SO(E)$.

Prop : $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$ est compact et si $G \subset GL(E)$ est un ss-groupe compact alors il existe une structure euclidienne telle que $G \subset \mathcal{O}(E)$.

Prop : Tout $f \in \mathcal{O}(E)$ est le produit d'au plus $n = \dim E$ réflexions.

Déf : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On appelle isométrie affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\|$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ens. des isométries affine. C'est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

Prop : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ ssi $f \in GA(\mathcal{E})$ et $\vec{f} \in \mathcal{O}(E)$.

Déf : $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}), \vec{f} \in \mathcal{O}^+(E)\}$ - déplacements

Thm : $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. Il existe une unique décomposition $f = t_{\vec{v}} \circ g$ où g isométrie dont l'ensemble G des points fixes est non vide et $\vec{v} \in \vec{G}$. De plus $\vec{G} = \ker(\vec{f} - id)$ et $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$.

Thm (dimensions 2 et 3)

2- Angles orientés dans le plan

Prop : Etant donnés deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre.

Déf : On définit la relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires $(u,v) \mathcal{R} (u',v') \Leftrightarrow \exists$ une rotation f tq $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$
On note $\overline{(u,v)}$ la classe de (u,v) et on l'appelle "angle orienté"
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés et $\vec{\mathcal{A}}$ l'ens. des couples de vecteurs unitaires.

Prop : Soit $\hat{\Phi} : \vec{\mathcal{A}} \to \mathcal{O}^+(E)$ définie par la première prop.
alors $\hat{\Phi}(u,u') = \hat{\Phi}(v,v') \Leftrightarrow (u,u') = (v,v')$ en tant qu'angles orientés
Finalement $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}^+(E)$ (isomorphisme de groupes)

3- Isométries conservant des objets du plan

Déf : Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier convexe à n sommets dans $\mathbb{R}^2$. On appelle groupe diédral d'ordre n et on note $\mathcal{D}_n$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent $\mathcal{P}_n$ invariant.

Prop : $\mathcal{D}_n = \langle r, s\rangle$ où r rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s symétrie par rapport à la droite passant par un sommet de $\mathcal{P}_n$ et le sommet opposé si n est pair et le milieu du côté opposé si n est impair. On a $r^n = s^2 = (sr)^2 = 1$.

Rq : En particulier $\mathcal{D}_3 \simeq \mathcal{S}_3$.

4- Quaternions et géométrie

voir 182

III - GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

voir 182.

IV - CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS -

voir 125 -

Leçon 201

Espaces de fonctions ; exemples et applications.

C'est rigolo, il me semble que cette leçon contient notamment les leçons 205, 208, 213, 215, 228, 234, 241, 245.

201 - Espaces de fonctions ; Exemples et Appli

I - ESPACES DE FONCTIONS RÉGULIÈRES SUR $\mathbb{R}$

1 - Fonctions continues et dérivables

Cadre : Soit X un ensemble, segment de $\mathbb{R}$.

Notation On note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X

Déf : f est une fonction uniformément continue sur X lorsque
$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x,y\in X,\ |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Prop : $UC^0 \Rightarrow C^0$ et si X est un segment de $\mathbb{R}$, $UC^0 \Leftrightarrow C^0$.

Déf : On dit que f est :
- L-Lipschitz lorsque $\forall x,y\in X,\ |f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$
- α-Hölder lorsqu'il existe $L>0$, $|\ |\leq L|x-y|^\alpha$

Prop : Lipschitz / Hölder $\Rightarrow C^0$.

Déf : f est dite Absolument continue lorsque
$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall n,\ \forall (\alpha_i,\beta_i)\in C,\ \sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$, on a $\sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon$.

Thm : f est $AC^0 \Leftrightarrow$ f est pp-dérivable et $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt$.

2 - Structure topologique

Cadre : X est un compact de $\mathbb{R}^d$.

Prop : $C(X)$ est un espace de Banach (séparable) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Déf : Lorsque $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ on parle de convergence uniforme.

Prop : Si $f_n\in C(X)$ et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ alors $f\in C(X)$.

Théorème (Stone-Weierstrass) Toute sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ contenant les constantes et distinguant les points est dense dans $C(X,\mathbb{R})$

Appli : Densité des polynômes.

Déf Une partie $\mathcal{A}\subset C(X)$ est dite équicontinue lorsque
$\forall x\in X,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall y\in X,\ |x-y|<\eta \Rightarrow \forall f\in\mathcal{A},\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Théorème (Ascoli) Une partie $\mathcal{A}\subset C(X)$ est compacte ssi elle est équicontinue et simplement bornée.

Appli : Théorème de Cauchy-Péano.

Topo CVS.

II - FONCTIONS TRÈS RÉGULIÈRES / FONCTIONS TESTS

1 - Fonctions C^k

2. Espace de Schwartz

Def : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lorsque

$$\forall p,\quad N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le p,\,|\beta|\le p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_{L^\infty} < \infty$$

Prop $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrique complet muni de :

$$\rho(g,f) = \sum 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}}$$

Def (Fourier). Soit $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}v(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) e^{-ix\cdot\xi}\,dx$.

Prop : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme d'inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(\xi) e^{+ix\xi}\,d\xi.$$

3. Fonctions tests et distributions

Def : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact

Théorème (Partition de l'unité).

:

Construction :

Prop : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Def (distribution). $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, $|\langle v, \varphi\rangle| \le C \sup_{x\in K,\,|\alpha|\le p} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Ex : L^1_{loc}

Def (distributions singulières)

III – FONCTIONS HOLOMORPHES

Déf : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe lorsque $\forall z_0 \in \mathbb{C}$,

$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe. On la note $f'(z)$. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Théorème (Cauchy-Riemann) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ssi $f = u+iv$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Théorème (Cauchy)

:

Théorème. holomorphe $\Leftrightarrow$ analytique

Théorème : Principe du maximum.

Appl : Théorème de Mönitz.

IV - ESPACES L^p

1 - Définition et propriétés structurelles

Déf Soit $0<p<\infty$. $L^p = \{ f \text{ mesurable}, \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty \}$.

Théorème : $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé et séparable pour $p \neq \infty$.

$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

Théorème (Riesz-Fischer). L^p est complet

Prop : $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov).

Théorème : Dualité dans les L^p.

Théorème (Riesz-Thorin)

2 - Propriétés hilbertiennes dans L^2.

Prop : $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$.

Prop : Une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ est donnée par les polynômes de Hermite.

Déf/Prop : $\mathcal{F}$ s'étend en une isométrie de L^2.

Déf/Prop : $L^2(\mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace de Bargmann des fonctions analytiques $\sum a_n z^n$ tq $\sum n! |a_n|^2 < \infty$.

App : La base de Hermite diagonalise $\mathcal{F}$.

3 - Convolution et régularisation

V - ESPACES DE SOBOLEV ET APPLICATIONS AUX EDP

1 - Définition et structure

Déf : $H^s(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}),\ (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \}$

Prop : fonctions C^2 dérivables s fois

2 - L'équation de Schrödinger linéaire

Théorème : Pour tout $v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution de $\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0 \\ v(0,\cdot) = v_0 \end{cases}$ appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$

C-ex : Il n'y a pas unicité si on suppose juste $v(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\forall t$.

Déf : $e^{it\Delta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \longmapsto e^{it\Delta} v_0$ solution.

Prop : $e^{it\Delta}$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^d)$

Théorème : Si $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $v = e^{it\Delta} v_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s)$ est l'unique solution de $\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \\ v(0,\cdot) = v_0 \end{cases}$

Leçon 202

Exemples de parties denses et applications.

Pour des applications du théorème de Stone-Weierstrass autres que la densité des polynômes et polynômes trigonométriques, on pourra consulter Gonnord, Tosel, *Analyse fonctionnelle*.

202. Exemples de parties denses et applications.

I. GÉNÉRALITÉS - EXEMPLES FONDAMENTAUX.

1- Parties denses

Cadre : (E,d) est un espace métrique.

Déf (adhérence). Soit $X \subset E$. L'adhérence de X dans E, notée $\overline{X}$, est le plus petit fermé inclus dans E contenant X : $\overline{X} = \bigcap_{F \text{ fermé}, X \subset F} F$.

Prop (caract. séquentielle). $x \in \overline{X} \Leftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x$

Déf (partie dense). $X \subset E$ est dense dans E lorsque $\overline{X} = E$. Ex : Un hyperplan est dense.

Déf (espace séparable). E est séparable lorsqu'il contient une partie dénombrable et dense. Ex : Un compact est séparable.

Déf (équirépartition). Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. On note pour $a,b \in [0,1]$, $X_n(a,b) = \text{card}\{k \in \mathbb{N}, u_k \in [a,b]\}$. On dit que $(u_n)_n$ est équirépartie lorsque $\forall a,b \in [0,1]$, $\frac{1}{n} X_n(a,b) \to b-a$.

Prop : Si $(u_n)_n$ est équirépartie, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

2- Exemples fondamentaux

Prop : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{R}$ est séparable.

Coro : Les $\mathbb{K}$-ev de dim finie sont séparables, $\mathbb{R}[X]$ est séparable.

Prop : $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop : L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

App : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Prop : Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$

App : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

App : $\{e^{i n\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ dense dans $\mathbb{S}^1$ ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$

Prop. L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $C^0([0,1], \mathbb{C})$

Thm (Weierstrass). L'ensemble des polynômes est dense dans $C^0([0,1], \mathbb{C})$. De plus, si $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ on a une suite explicite qui CVU vers f donnée par ces polynômes de Bernstein.

App (Weyl) $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie ssi $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi l u_k} = 0$

App (Riemann-Lebesgue) : Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ alors $\int_0^1 f(t) e^{itx} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3- Un critère de densité.

Thm (Hahn-Banach) Soit E un evn et $F \subset E$ un sev de E. Soit $\phi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme M. Alors ϕ se prolonge en une forme linéaire de E continue et de même norme M.

Corollaire. Soit E un evn et $X = \text{Vect}(x_j) \subset E$. Alors on a :
$x \in \overline{X} \Leftrightarrow [\forall \phi \in E' \text{ continue}, (\phi(x_j) = 0 \ \forall j) \Rightarrow \phi(x) = 0]$.

Corollaire. X dense dans E ssi toute forme linéaire continue qui s'annule en les x_j est identiquement nulle.

App (Müntz). Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite de réels > 0. Il y a équivalence
(i) L'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto 1$, $t \mapsto t^{\lambda_j}$, $i \geq 1$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$
(ii) $\sum \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$.

II. DENSITÉ ET COMPLÉTUDE

1- Deux résultats fondamentaux.

Théorème (Prolongement). Soit $f : D \subset E \to F$ une application uniformément continue définie sur D une partie dense de E et à valeurs dans F où E et F sont des evn, F étant complet. Alors f se prolonge de façon unique en une app (uniformément) continue $E \to F$.

App : intégrale de Riemann des fonctions réglées à valeurs dans un espace de Banach.

App : Transformée de Fourier (voir après).

Théorème (Baire). Soit (E,d) un espace métrique complet. Une intersection dénombrable d'ouverts (i.e. un G_δ) denses est dense.

App : Il existe un G_δ dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ de fonctions continues nulle part dérivables.

Rem : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. L'ens. des points de C^0 de f' est dense dans I.

App (Morgenstern). Il existe un G_δ dense dans $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ (muni de la norme de la CVU de toutes les dérivées) de fonctions analytiques nulle part.

Def (hypercyclique). (E,d) C-ev complet séparable. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est hypercyclique pour A lorsque $\{A^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ dense dans E.

Prop : L'ens des points hypercycliques pour A est ou bien vide ou bien un G_δ dense dans E. Dans ce second cas, A est dit hypercyclique.

Théorème (Kitai) Supposons qu'existent X et Y deux parties denses de E et $B : Y \to Y$ tq (i) $x \in X \Rightarrow A^n x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ii) $y \in Y \Rightarrow B^n y \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (iii) $y \in Y \Rightarrow ABy = y$. Alors A est hypercyclique.

App : La dérivation sur $H(\mathbb{C})$ est hypercyclique, la translation aussi.

2. Espaces de Hilbert

Théorème : Soit H un espace de Hilbert et F un sev de H. Alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Def : Soit $(e_n) \in H^{\mathbb{N}}$. On dit que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne ssi c'est une famille orthonormée telle que $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)} = H$.

Théorème : Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Théorème : Il y a équivalence entre :
(i) $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de (E).
(ii) $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (Pythagore)

Ex (Fejer). Les fonctions $e_n : x \mapsto e^{2i\pi nx}$, $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(0,1)$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_{(0,1)} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$.

App : la théorie des séries de Fourier.

Def : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$. On note $L^2(I,\rho)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carrés intégrable pour la mesure $\rho\, dx$, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_I \overline{f(x)} g(x) \rho(x)\, dx$.
On appelle polynômes orthogonaux pour ρ l'unique famille orthogonale de polynômes unitaires obtenue par orthogonalisation de Gram de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Thm. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex : Polynômes de Hermite : $\rho(x) = e^{-2\pi x^2}$, $I = \mathbb{R}$. $\to H_n$
Polynomes de Legendre : $\rho(x) = 1$, $I = [-1,1]$.

App : Intégration numérique (méthode de Gauss).

App : Diagonalisation de la transformée de Fourier en base d'Hermite.
$h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x)$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ telle que si $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ désigne la transformée de Fourier, $\mathcal{F} h_n = (-i)^n h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. DENSITÉ ET ESPACES FONCTIONNELS.

1. Le théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème : Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$. $C(X,\mathbb{C})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C(X)$. $\mathcal{A}$ est dense dans $C(X,\mathbb{C})$ ssi : (a) $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$ (b) $\forall x \in X$, $\exists f \in \mathcal{A}$, $f(x) \neq 0$
(c) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in \mathcal{A}$, $f(x) \neq f(y)$.

2- Espaces L^p.

Thm : L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$

Coro : L^p est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

C-ex : L^∞ n'est pas séparable.

3- Régularisation et fonctions régulières.

Prop : Il existe des fonctions C^∞ à support compact dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensembles des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

Prop : Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Def : On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(\rho_n)_n$ telle que (i) $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Supp} \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$ et $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Thm : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, Alors $\rho_n * f \to f$ dans L^p

Corollaire : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Aff : Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sur les parties compactes de $L^p(\Omega)$.

Def : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ v \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta v(x)| < \infty \}$

Prop : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la métrique $d(g,f) = \sum 2^{-|\alpha|+|\beta|} \dfrac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}}$ est complet.

4- Transformée de Fourier et équation de Schrödinger.

Def (transformation de fourier) : On définit la transformée de fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$.

Prop : $\mathcal{F}$ est une isométrie bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d'inverse $\mathcal{F}^* f := \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$.

Thm : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aff : L'équation de Schrödinger linéaire $(*)$ $\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0, \text{ dans } C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \\ v(0,\cdot) = v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$ admet une unique solution donnée par : $v(t,x) = e^{it\Delta} v_0(x)$ où $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \hat{f})$

Prop : L'opérateur $e^{it\Delta}$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $t \mapsto e^{it\Delta} f \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$.

Aff : Le problème $(*)$ posé dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ admet une unique solution donnée pour $v = e^{it\Delta} v_0$; avec $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Leçon 203

Utilisation de la notion de compacité.

Prokhorov !

203 Utilisation de la notion de compacité

I - NOTION DE COMPACITÉ

1 - Propriété de Borel-Lebesgue, caractérisation séquentielle

Déf : Un espace topologique séparé est compact lorsque de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

ie. Pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, $\exists J \subset I$ fini tq $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

À partir de maintenant, on reste toujours dans le cas métrique.

Déf : (E,d) est pré-compact lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1,\dots,x_N$ tq $E = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon)$

Prop : (E,d) compact $\Leftrightarrow$ précompact et complet.

Prop : (E,d) compact $\Leftrightarrow$ toute suite a une valeur d'adhérence.

Ex : En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés. Ex : $O(n)$

Théorème (Tychonoff) : Un produit (dénombrable) d'espaces métriques compacts est compact.

Déf : Une partie d'un espace métrique est relativement compacte lorsque son adhérence est compacte. Ex : $]0,1[$ est rel. compact dans $\mathbb{R}$

Prop : Un compact est fermé borné

Prop : L'image continue d'un compact est compacte.

Prop : Tout espace métrique compact est séparable.

EXTRACTION DIAGONALE — Théorème de Riesz

2 - Applications à l'étude de suites réelles - Compacts de $\mathbb{R}$

Théorème (Bolzano-Weierstrass) : Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Corollaire : Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique compact est CV ssi elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Ex : (u_n), (v_n) suites réelles tq $\begin{cases} u_n - v_n \to 0 \\ u_n^3 + v_n^3 \to 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u_n \to 0 \\ v_n \to 0 \end{cases}$.

Prop : (x_n) suite de réels. Il y a équivalence entre (i) (e^{itx_n}) CV $\forall t \in \mathbb{R}$ (ii) la suite (x_n) converge.

App : Une limite en loi de variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne.

Prop : La décomposition polaire est un homéomorphisme $GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$

II - FONCTIONS CONTINUES - ET... COMPACITÉ

1 - Optimisation

Théorème : Si (X,d) compact, alors toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

App : Équivalence des normes en dimension finie.

App : Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis.

App (ellipsoïde de John-Loewner) : Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Déf : Si (X,d) non borné, on dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est coercive lorsque $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$

Prop : Une fonction continue coercive est minorée et atteint son minimum.

Ex : Une fonction α-convexe est coercive.

Ex : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ est coercive.

App : Résolution numérique du système $Ax = b$ par méthode de gradient.

2 - Le théorème de Heine

Théorème (Heine) : Toute fonction continue sur un compact est uniformément C^0.

App (Weierstrass-Bernstein) : Toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme de la suite des polynômes $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^k$.

3 - Prolongement des applications continues

Théorème : Si K compact et A dense dans X et $f : A \to K$ continue telle que pour tout couple (F_0, F_1) de fermés disjoints de K alors $f^{-1}(F_0) \cap f^{-1}(F_1) = \emptyset$, alors f se prolonge continûment à X.

✓ BOF BOF métrique

Théorème (Urysohn) Soit A, B deux fermés disjoints d'un espace compact X. Il existe $f: X \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$.

Théorème (Tietze) Soit A un fermé d'un compact X. Soit $f: A \to \mathbb{R}$ C^0. Alors f se prolonge en une fonction $g: X \to \mathbb{R}$ continue.

4- Théorèmes de point fixe.

Théorème (Brouwer). Toute application continue d'un convexe compact non vide K d'un espace euclidien à valeurs dans K admet un point fixe.

Théorème (Schauder). Soit C un convexe fermé de (E,d). Soit $f: C \to C$ continue. Si $f(C)$ est relativement compact alors f a un point fixe.

Aff : Le théorème de Cauchy-Peano sur l'existence de solutions pour les équations différentielles ordinaires (avec le thm d'Ascoli)

Théorème (Kakutani). Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un convexe compact non vide tel que $\forall g \in G$, $g(K) \subset K$. Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.

Aff : Soit G un ss-groupe compact de $GL(E)$. Alors il existe un produit scalaire euclidien sur E (ie) de forme quadratique q telle que $G \subset O(q)$.

III - COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS.

1- Le théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème (Dini) Si une suite croissante de fonctions réelles continues sur un compact converge simplement vers une fonction continue, alors elle converge uniformément.

Aff : la racine carrée sur $[0,1]$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

Théorème (Stone-Weierstrass). Si X est compact alors toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ contenant les constantes et distinguant les points est fermée pour la convergence uniforme et coïncide avec $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Aff : théorème de Weierstrass sur la densité des polynômes pour la CVU.

Aff : version trigonométrique et séries de Fourier dans L^2.

2- Quelques critères de compacité.

Théorème (Ascoli). Si (X,d) compact alors une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est relativement compacte (pour la CVU) ssi elle est bornée et équicontinue (simplement).

Aff : Le théorème de Cauchy-Peano

Théorème (Montel). Les parties relativement compactes de $\mathcal{H}(\Omega)$ pour la topologie de la CVU sur tout compact sont les parties bornées.

Aff ...

Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $U \subset\subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. On suppose que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta < \mathrm{dist}(U, \Omega^c)$ tq $\forall \|h\| < \delta$, $\forall f \in \mathcal{F}$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$.
Alors $\mathcal{F}_{|U}$ est relativement compact dans $L^p(U)$.

Aff .....

3. Résultats de compacité pour la convergence en loi

Déf : Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles converge en loi vers X lorsque les fonctions de répartitions respectives F_n, F vérifient : $F_n(x) \to F(x)$ en tout point de continuité de F.
On note $\mu_n \Rightarrow \mu$ où μ_n, μ sont les lois de X_n, X.

Théorème (Helly) Soit (F_n) une suite de fonctions de répartition. Il existe une sous suite $(F_{n_k})_k$ et F_∞ une fonction tq $\forall x, F_{n_k}(x) \to F_\infty(x)$. Si F_∞ vérifie $\lim_{x \to +\infty} F_\infty(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_\infty(x) = 0$ alors il existe une fonction de répartition F tq $F_n \Rightarrow F$.

Théorème (Prokhorov). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité telles que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n([-M, M]) > 1 - \varepsilon$.
Alors il existe une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ qui CV vers une mesure de proba.

App (théorème de Lévy). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de proba dont les fonctions caractéristiques sont notées ϕ_n. Si :
(a) $\phi_n \to \phi_\infty$ simplement (b) ϕ_∞ est continue en $t = 0$.
Alors il existe une mesure de proba μ_∞ tq $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ et ϕ_∞ est la fonction caractéristique de μ_∞.

IV - OPÉRATEURS COMPACTS.

1 - Définition et premières propriétés

Déf : Un opérateur $T : E \to F$ où E, F Banach est dit compact lorsque $T(B_E(0,1))$ est relativement compact dans F.
On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

Propriétés (i) $\mathcal{K}(E,F)$ est un evn fermé de $\mathcal{L}(E,F)$ (pour la norme d'op.)
(ii) Une limite en norme d'opérateur d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.
(iii) Si E, F, G Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{K}(F,G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$

Ex : les opérateurs à noyau dans $C^0([0,1])$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ C^0 alors $T_K : E \to E$, $f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy\right)$ est compact (Ascoli + Heine).

Théorème (Fredholm) Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors (i) $\mathrm{Im}(I - T)$ est fermée.
(ii) Si $I - T$ est injectif alors $I - T$ est surjectif.

App : (bases presque orthogonales). Soit H un Hilbert et $\{x_n\}$ une base hilbertienne. Soit $\{y_n\}$ tq $\sum \|x_n - y_n\|^2 < \infty$. Si la famille $\{y_n\}$ est une famille libre alors elle est totale.

2. Propriétés spectrales

Déf (spectre) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ (T - \lambda I_d) \text{ est bijectif } E \to E\}^c$

Prop : Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors $0 \in \sigma(T)$ et on a l'une des trois situations :
(a) $\sigma(T) = \{0\}$ (b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini (c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

Prop : Ici $E = H$ un espace de Hilbert. On suppose que $T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint. Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$, $M \in \sigma(T)$ où $m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle$, $M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle$

Théorème Soit T un opérateur autoadjoint compact d'un espace de Hilbert H. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

App : trouver une EDP.

V - COMPACITÉ FAIBLE DANS LES HILBERT

Thm (Banach-Alaoglu). Soit $(T_n)_n$ une suite bornée de formes linéaires C^0 d'un evn séparable E. Alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_k$ et $T \in E'$ telles que $\forall x \in E$, $T_{n_k}(x) \to T(x)$ dans $\mathbb{K}$.

Déf : Soit H un Hilbert. On dit que x_n CV faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $\forall y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Thm : Dans un espace de Hilbert séparable, toute suite bornée admet une sous-suite qui CV faiblement.

App. H Hilbert séparable, C convexe fermé de H et $J : H \to \mathbb{R}$ C^1 convexe coercive. Alors $\exists x \in C$ tq $J(x) = \inf_C J$.

Leçon 204

Connexité. Exemples et applications.

Le livre de S. Dolecki, *Analyse fondamentale* est vraiment très bien.

Cette leçon a été réalisée en collaboration avec Gabriel Lepetit, keur sur lui.

204

Connexité. Exemples et applications

[Q, 106] [Q, 108] [Dol, 114] [Q, 106]

I. Espaces connexes

1. Connexité

Déf 1 : Soit X espace topologique. On a équivalence entre :
i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$, O_i ouvert, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$
ii) Si $X = F_1 \cup F_2$, F_i fermé, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$
iii) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.
Dans ce cas, on dit que X est connexe

Ex 2 : $\mathbb{R}$ est connexe

Prop 3 : X est connexe $\Leftrightarrow$ toute application continue $\varphi : X \to Z$ est constante

Généralisation 4 : Si X est connexe et $\varphi : X \to Y$ continue localement constante, alors φ est constante.

Déf 5 : $A \subset X$ est une partie connexe si elle est connexe pour la topologie induite

Ex 6 : $[0;1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$

Contre-ex 7 : $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.

Déf 8 : Si X espace topologique, $M, N \subset X$ sont dites séparées si
$(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$

Prop 9 : Les parties connexes de X sont les $A \subset X$ tels que $A = M \cup N$, M, N séparés $\Rightarrow M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$

Thm 10 : Si $A \subset X$, toute partie connexe de X rencontrant l'intérieur et l'extérieur $X \setminus \overline{A}$ de A rencontre ∂A.

Ex 11 : les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont convexes, i.e. des intervalles.

Prop 12 : Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur X dont toutes les classes sont ouvertes, alors il n'y a qu'une classe d'équivalence.

2. Stabilité

Thm 13 : Si X connexe et $f : X \to Y$ continue, $f(X)$ est connexe.

Application 14 : théorème des valeurs intermédiaires.

[Q, 108] [Dol, 114] [Q, 106]

Prop 15 :
- Une réunion de connexes dont l'intersection est non vide est connexe.
- $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ muni de la topologie produit est connexe $\Leftrightarrow \forall n, X_n$ connexe

Prop 16 : L'adhérence d'un connexe est connexe

Contre-ex 17 :  $A^c \cap B$ n'est pas connexe.

3. Composantes connexes

Déf 18 : Si X espace topo, la composante connexe de $x \in X$ est
$C(x) = \bigcup_{\substack{C \ni x \\ C \text{ connexe}}} C$. C'est le plus grand connexe contenant x.

Ex 19 :
- Rayman a 6 composantes connexes
- L'hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $xy = 1$ en a deux.

Prop 20 : Les composantes connexes de X sont fermées, 2 à 2 disjointes

Thm 21 :
- Si $X = \bigsqcup_{j \in J} O_j$ où O_j ouvert connexe, alors les O_j sont les composantes connexes de X
- Si $X = \bigsqcup_{j \in J} F_j$ où J fini, F_j fermé connexe, les F_j sont les composantes connexes de X

[Q, 113] [Dol, 119] [Dol, 115] [Q, 204] [Q, 109]

Application : Thm de Sierpiński (22) : un espace métrique compact connexe ne peut être décomposé en une famille infinie dénombrable de fermés disjoints deux à deux.

Prop 23 : Un homéomorphisme $h : X \to Y$ envoie une composante connexe de X sur une composante connexe de Y.

Thm de Jordan 24 (admis) : une courbe $\mathcal{C}^0$ fermée simple γ d'image J est telle que J^c a deux composantes connexes : une bornée et une non bornée C_∞ et $\partial C_0 = \partial C_\infty = J$.

4. Connexité par arcs

Déf 25 : X est connexe par arcs (cpa) si $\forall a, b \in X, \exists \gamma : [0;1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$

Prop 26 : convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ cpa $\Rightarrow$ connexe

Ex 27. S^n est cpa

Contre-ex 28 : L'adhérence de $\{(x, \sin(\frac{1}{x})), x>0\}$ dans $\mathbb{R}$ est connexe mais pas cpa. [CG, 168]

Application 29 : les cpa de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Prop 30 : Si D est un ensemble dénombrable, $D \subset \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs

[Q, 117] Prop 31 : Si Ω ouvert d'un evn, Ω cpa $\Rightarrow \Omega$ connexe

II. PROLONGEMENT PAR CONNEXITÉ.

1. Application à l'analyse réelle

Thm 32 [Hadamard-Lévy] : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, de différentielle inversible en chaque point et telle que $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.
Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

[CG, 126] Prop 33 [unicité globale de Cauchy-Lipschitz] : soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $(t, y_1, \dots, y_n) \mapsto f(t, y)$ continue et localement lipschitzienne en y.
Si y_1 et y_2 vérifient $\begin{cases} y_i' = f(t, y_i) \ \forall t \in I \\ y_i(t_0) = y_0 \end{cases}$ alors $y_1 = y_2$ sur I, si I intervalle.

Thm 34 (Darboux) : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Analyse complexe

[Q, 125] Prop 35 : Soit γ courbe fermée $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image γ^*. Alors $\mathrm{Ind}_\gamma : a \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est constante à valeurs entières sur chaque composante connexe de $(\gamma^*)^c$.

[Rud 250] Application: Thm 36 (formule de Cauchy) : Soit Ω ouvert convexe, γ courbe fermée dans Ω, f holomorphe sur Ω, alors si $z \in \Omega$ et $z \notin \gamma^*$, $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Prop 37 : Soit Ω ouvert connexe et $f \in H(\Omega)$. [Rud 251]
L'ensemble des zéros de f dans Ω est $Z(f) = \Omega$ ou bien est un ensemble sans point d'accumulation, au plus dénombrable

Coro 38 [unicité du prolongement analytique]
Si f, g sont holomorphes sur Ω ouvert connexe, et coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.

Application 39 : la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ admet un unique prolongement holomorphe à $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$

3. Théorème du relèvement continu et applications

Thm 40 : Soit $\gamma : [a;b] \to \mathbb{U}$ une application continue. Il existe une unique application $\theta : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t \in [a;b]$, $\gamma(t) = e^{i\theta(t)}$. θ est appelé relèvement de γ. DVP 1

Coro 41 [Borsuk-Ulam] : Si $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue, alors il existe $w \in S^2$ tel que $f(w) = f(-w)$

Ex : à temps fixé, il existe deux points antipodaux sur la Terre qui ont même température et même pression.

Coro 42 [Brouwer] : si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est continue ($\mathbb{D}$ disque unité de $\mathbb{C}$), alors f admet un point fixe.

III. UN AUTRE POINT DE VUE : CONNEXITÉ DANS LES ESPACES DE MATRICES

1. Groupes de matrices topologiques

Déf 43 : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie séparée pour laquelle $g \mapsto g^{-1}$ et $(g, h) \mapsto g \times h$ sont continues [MT, 28]

Ex 44 pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques.

[MT, 3.1] **Prop 45** : Si G est un groupe topologique, H sous-groupe connexe tel que G/H est connexe, alors G est connexe

Thm 46 :
- $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert cpa
- $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arcs) $GL_n^+(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) / \det M < 0\}$.
- $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs
- $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, c'est l'une des composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$

[CG, 30] Ex 47 : L'ensemble des projecteurs P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a $n+1$ composantes connexes qui sont les $P_r = \{$projecteurs de rang $r\}$, pour $0 \leq r \leq n$

2. Utilisation de la connexité en algèbre linéaire

[DVP 2] **Thm 48** :
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$
- $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Prop 49 : L'image de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est $\{A^2 / A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

[MT, 6.4-6.6] Application SO (admis)

Thm [Cartan-Von Neumann] : tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété réelle de $GL_n(\mathbb{C})$.

Thm 51 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Références :
- [Q] : Hervé Queffelec, Topologie
- [Dol] : Szymon Dolecki, Analyse fondamentale
- [Cl] : Pierre Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)
- [Rud] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe
- [CG] : Caldero-Germoni, Histoire hédoniste de groupes et de géométrie
- [MT] Mneimné-Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques

(Antoine Diez, Gabriel Lepetit)

Leçon 205

Espaces complets. Exemples et applications.

Tout (ou presque) ce qui concerne le théorème de Baire est dans le Gourdon. Le livre de S. Dolecki, *Analyse fondamentale* est vraiment très bien.

205 - Espaces complets - Exemples et applications -

I - ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS.

1 - Suites de Cauchy, Espaces complets

Def : Soit (X,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X est dite de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p,q \geq n$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Prop : Toute suite convergente est de Cauchy.

Propriétés : Toute suite de Cauchy est bornée et converge dès lors qu'elle admet une sous-suite convergente.

Def : Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy dans cet espace converge.

Ex : La topologie discrète est complète avec la métrique $d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=y \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

C-ex : $\mathbb{R}_+^*$ muni de la métrique $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

C-ex : L'image d'un espace complet par une app° C^0 n'est pas toujours complet

Ex : $\mathbb{R}$ est complet.

Propriétés (i) Tout sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.
(ii) Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.
(iii) Un produit d'espaces complets avec la métrique produit est complet.

Corollaire : Tout $\mathbb{R}$-ev de dim finie est complet.

Ex : $\mathbb{R}_n[X]$ complet mais $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\| = \sup_k |a_k|$ ne l'est pas.

Prop : Un espace métrique est compact ssi il est complet et précompact.

Théorème : (X,d) complet ssi pour toute suite $(F_n)_n$ décroissante de parties fermées non vides telle que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Théorème (Complétion) Pour tout espace métrique (X,d), il existe un espace métrique complet $(\tilde{X}, \tilde{d})$ tel que X est isométrique à un ss-espace dense de $\tilde{X}$. Tout autre complété de (X,d) est isométrique à $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

2 - Espaces fonctionnels complets -

Prop : L'espace des fonctions continues bornées $C_b(X,\mathbb{R})$ où (X,d) métrique muni de la distance $D(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ est complet.

Théorème : Tout espace métrique est isométrique à un sous-espace de l'espace des fonctions continues bornées avec la métrique évidente.

Prop : Les fonctions holomorphes munies de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact métrisé par $d(f,g) = \sup_n \min(2^{-n}, \sup_{K_n} |f(x) - g(x)|)$ est complet.

Prop : L'espace des variables aléatoires muni de la distance qui métrise la CV en proba est complet.
(même en loi → Lévy-Prokhorov, Monge-Kantorovich-Wasserstein)

3 - Prolongement des applications uniformément continues -

Théorème : Soient E, F deux espaces métriques avec F complet. Soit $A \subset E$ une partie dense et soit $f : A \to F$ uniformément continue. Alors f se prolonge de manière unique en une fonction (uniformément) continue $E \to F$.

Aff : Construction de l'intégrale de Riemann sur l'ensemble des fonctions réglées.

Aff : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$ s'étend en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

4. Théorème de point fixe.

Théorème : Soient (E,d) un espace métrique complet et $f:E\to E$ une application contractante. Alors f a un unique point fixe $x\in E$ qui est la limite de la suite $\begin{cases} x_0\in E \\ x_{n+1}=f(x_n),\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Aff : Le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ordinaires.

Aff : Le théorème d'inversion locale et des fonctions implicites.

5. Le théorème de Baire

Théorème (Baire). L'intersection d'un ensemble dénombrable d'ouverts denses d'un espace métrique complet est dense.
- La réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Aff : $\mathbb{Q}$ n'existe pas de métrique sur $\mathbb{Q}$ qui le rende complet.

Déf : Un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Prop : Tout G_δ d'un espace métrique complet est complètement métrisable.

Aff : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est complètement métrisable.

Prop : L'ensemble des points de continuité d'une fonction simple de fonctions continues est dense.

Prop : Il existe un G_δ dense de fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^0 dérivables nulle part.

Théorème (Mazurkiewicz) : Il existe un G_δ dense de fonctions C^∞ nulle part analytiques.

Déf : Soit (E,d) séparable complet. $x\in E$, $A\in\mathcal{L}(E)$ continu. On dit que x est hypercyclique lorsque $\{A^n(x),\ n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans E.

Prop : L'ensemble des points hypercycliques $HC(A)$ est vide ou dense. Dans le second cas, on dit que A est hypercyclique.

Théorème (Kitai) Supposons qu'existent $X,Y\subset E$ denses et $B:X\to Y$ tel que (i) $x\in X\Rightarrow A^n x\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (ii) $y\in Y\Rightarrow B^n y\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (iii) $y\in Y\Rightarrow ABy=y$.
Alors A est hypercyclique.

Aff : L'opérateur de translation $T:f\mapsto(z\mapsto f(z+1))$ sur les fonctions entières est hypercyclique.

II. ESPACES DE BANACH.

1. Définition et exemples.

Déf : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Ex : Les espaces de dimension finie sont de Banach.

C-ex : L'espace c_{00} des suites nulles après avec $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas un espace de Banach.

Théorème (Riesz-Fischer). Les espaces L^p, $1\le p\le\infty$ sont de Banach.

Prop : Si E,F evn avec F Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ Banach.

Aff : Le dual d'un evn est un espace de Banach.

2. Théorèmes fondamentaux dans les espaces de Banach -

voir leçon 208.

3. Banach réflexifs ou autre chose ? Pas la place

III - ESPACES DE HILBERT.

1 - Définitions et résultats fondamentaux.

Déf : Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui le rend complet.

Ex : les espaces de dimension finie

Ex : $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2(\mathbb{R})$ sont des espaces de Hilbert.

C-ex : un espace préhilbertien qui n'est pas de Hilbert ...

Théorème (Projection). Soit H un Hilbert, $C \subset H$ un convexe fermé et $x \in H \setminus C$. Il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf_{c \in C} \|x - c\|$. Il est caractérisé par $p_C(x) \in C$ et $\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), c - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall c \in C$.

AH : Construction de l'espérance conditionnelle sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Corollaire : F un sev de H. Alors $F \oplus F^\perp = E$ et F dense ssi $F^\perp = \{0\}$.

Déf : Une base hilbertienne de H est une famille $(e_n)_n$ orthonormée telle que $\mathrm{Vect}(e_n)$ soit dense.

Thm (Bessel-Parseval) ...

2. Dualité dans les Hilbert

Théorème (Riesz) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire c°. Il existe un unique $h \in H$ tq $\forall x \in H$, $\varphi(x) = \langle h, x\rangle$.

Corro : $H' \simeq H$.

Théorème (Lax-Milgram) + (Stampacchia)

3. Application aux équations aux dérivées partielles linéaires -

- Définition Sobolev.
- Équation de Schrödinger $\psi(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{e^{it\Delta}} (L^2) \dashrightarrow H^s$
- Problème aux limites pour les EDP elliptiques avec Lax-Milgram.

Leçon 207

Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

C'est pas si facile... Le théorème de relèvement est probablement hors-sujet. En revanche on peut parler un peu plus du théorème de Tietze et du lemme d'Urysohn. Une preuve pas trop difficile est dans les exercices du *Cours d'analyse, Distributions et analyse de Fourier* de J-M. Bony (et aussi dans Zuily, Quéffelec mais bon...).

207 - Prolongements de fonctions. Exemples et App°

I. DANS UN CADRE TOPOLOGIQUE

1- Prolongement ponctuel par continuité

Déf: Soit $f : E \to F$ (E, F espaces topo séparés) et $a \in E$ est un point d'accumulation où f n'est pas définie. Si la limite $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$ existe alors $g(x) = f(x)$ et $g(a) = \ell$ est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

Ex: $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par C^0 en zéro par 0.

C-ex: $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

2- À partir d'une partie dense

Thm: Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, D une partie dense de X et $f : D \to Y$ une fonction continue. Alors f admet au plus un prolongement continu sur X.

Thm: Si Y est complet et f uniformément continu sur D alors f admet un unique prolongement continu sur X qui est en outre uniformément continu.

App: L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est prolongeable en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

App: Intégrale de Riemann des fonctions réglées à valeurs dans un espace de Banach.

3. Par des arguments de connexité

Théorème (Darboux): Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème: Unicité des solutions globales dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème (Hadamard-Lévy)

Théorème (relèvement): Prolongement de la fonction argument définie sur tout plan fendu.

App: l'Antipodensatz de Borsuk.

4- Théorèmes de Tietze et Urysohn

Théorème (Urysohn): Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace compact X. Il existe $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$ et $0 \leq f \leq 1$.

Théorème (Tietze): Soit A un fermé d'un compact X. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ C^0 alors f se prolonge en une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ continue.

II - PROLONGEMENT DES FORMES LINÉAIRES

Théorème (Hahn-Banach) Soit E un $\mathbb{R}$-evn et $p : E \to \mathbb{R}$ telle que (i) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in E$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ii) $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Soit $F \subset E$ un sev et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in F$, $\varphi(x) \leq p(x)$. Alors φ peut s'étendre en une forme linéaire sur E dominée par p.

Corollaire. Toute forme linéaire continue sur un sev peut s'étendre en une forme linéaire continue sur E de même norme.

Thm. Dans un evn, $\|x\| = \max_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)|$.

Thm. $x \in \overline{\mathrm{Vect}(y_j)} \iff [\forall j, \varphi(y_j) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0]$.

Ap : théorème de Müntz

III - DANS UN CADRE DIFFÉRENTIEL

1. Prolongement C^1.

Théorème : $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ une fonction C^0 sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}^p$ et vaut L alors la dérivée à droite $f_d'(a)$ de f en a existe et vaut L.

Thm : Mêmes hypothèses sur f. Si f' est bornée alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}^p$: on peut prolonger f par C^1 en a.

Ex : $x \to \frac{\sin x}{x}$.

2. Construction de fonctions C^∞.

Ex : $x \to \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est prolongeable de façon C^∞ en 0.

Théorème (Whitney). Un fermé arbitraire F est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞.

Théorème (Borel). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tq $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.

Théorème (Urysohn - fonctions plateaux) K compact contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ouverts $\omega_1, \dots, \omega_N$. Il existe des fonctions $\chi_j \in \mathcal{D}(\omega_j)$ tq $0 \leq \chi_j \leq 1$ et $\sum \chi_j = 1$ sur un voisinage de K.

Ap : Régularisation, approx l'unité, densité C_c^∞, ...

IV - DANS UN CADRE ANALYTIQUE ET HOLOMORPHE

1- Prolongement analytique sur le bord du disque de CV d'une série entière

Thm (Abel angulaire). Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose :

$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z|<1, \exists \rho>0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

Si $\sum a_n$ converge alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Thm (Tauber faible). On suppose $a_n = o(\frac{1}{n})$. Si $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$ alors $\sum a_n$ CV et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

Thm (Tauber fort, Hardy-Littlewood). Même conclusion en supposant seulement $a_n = O(\frac{1}{n})$.

C-ex : $\sum z^n$ diverge sur tout le cercle de convergence

Ex : $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ converge sur tout le cercle de convergence.

C-ex : $\sum \frac{1}{n} z^n$ converge pour $z=-1$, diverge pour $z=1$.

2- fonctions holomorphes

Thm (zéros isolés). Si f est holomorphe sur un ouvert connexe alors les zéros de f sont isolés. En particulier il existe au plus un prolongement analytique.

Ex : Il existe une unique fonction holo sur $\mathbb{C}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ - Calculer

C-ex : $z \mapsto 0$ et $z \mapsto \sin(\frac{\pi}{z})$ sont holo sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = 0$ [OA 2.2]

Def. La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$ sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$

La fonction $\zeta(s) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ sur $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ sont holo.

Thm - La fonction Γ est prolongeable analytiquement à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ via la formule $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{z}{n}} e^{z/n}$ [Candelpergher]

Thm : La fonction ζ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et vérifie $\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma(\frac{s}{2}) = \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s) \Gamma(\frac{1-s}{2})$. [ZQ]

V - PROBLÈMES D'INTERPOLATION

1- interpolation polynômiale

Cadre : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$, $x_i = x_0 + ih$.

Thm. Il existe un unique polynôme $\Pi_n f$ de degré n tel que $\Pi_n f(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. Il s'écrit $\Pi_n f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Thm (spline). Il existe une unique fonction $s_n f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq (i) $s_n f \in C^2([a,b])$ (ii) $s_n f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 - (iii) $s_n f(x_i) = f(x_i)$ (iv) $(s_n f)'(a) = f'(a)$ et $(s_n f)'(b) = f'(1)$

App : Intégration numérique -

2- Prolongement d'opérateurs : le théorème de Riesz-Thorin

Thm (Riesz-Thorin) Soient (X, μ) et (Y, ν) des espaces mesurés et $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ dans $[1, \infty]$. On se donne une application linéaire $T : L^{p_i}(X) \to L^{q_i}(Y)$ continue pour $i \in \{0,1\}$ avec pour normes respectives Π_0 et Π_1. Pour $a \in (0,1)$ on considère $p(a)$ et $q(a)$ tels que

$$\frac{1}{p(a)} = \frac{1-a}{p_0} + \frac{a}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q(a)} = \frac{1-a}{q_0} + \frac{a}{q_1}.$$

Alors $T : L^{p(a)}(X) \to L^{q(a)}(Y)$ est continue de norme $M(a)$ avec $M(a) \leq M_0^{1-a} M_1^{a}$.

Leçon 208

Espaces vectoriels normés, applications linéaire continues. Exemples.

Bon courage. Les trucs sur les topologies faibles peuvent être présentés en version dégradée à partir du Gonnord, Tosel, *Analyse fonctionnelle*.

[Lax], [Dolecki] -

208 - Espaces vectoriels normés, app. linéaires continues - Exemples -

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES EVN ET LES APP LIN CONTINUES

1- Définitions

Cadre : E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf : Une norme est une app $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ tq pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:
(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Ceval

Rem : Un evn est un espace métrique pour $d(x,y) = \|x-y\|$.

Exemples : - Pour $1 \leq p < \infty$, $\ell^p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \|x\|_p := \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\}$.
- $\ell^\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sup |x_n| = \|x\|_\infty < \infty\}$.

Déf : Deux normes N_1, N_2 sont équivalentes lorsque $\exists a, b > 0$ tq $\forall x \in E$, $a N_1(x) \leq N_2(x) \leq b N_1(x)$.

Ex :

Prop : Dans $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ il y a équivalence entre :
(i) f est continue (ii) f est C^0 en 0 (iii) f est lipschitzienne (iv) bornée

Déf : $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des app lin. continues $E \to F$ est normé pour la norme $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Ex : + chne ex.
Déf : Dual topologique : hyperplan = noyaux d'une forme lin. continue.
Prop : Un hyperplan d'un evn est fermé ou dense.

2- En dimension finie

Prop : Un evn est de dim finie ssi il est lin-homéomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Prop : Toutes les app lin sont continues.

Prop : La boule unité est compacte.

Prop : Toutes les normes sont équivalentes.

Prop : $\mathcal{L}_c \simeq E'$

3. En dimension infinie

Prop (Riesz) : La boule unité est compacte $\Leftrightarrow$ E est de dim finie.

Déf : Lorsque E est complet on parle d'espace de Banach.

Ex : L^p est complet (preuve plus loin).

Divers contre-exemples.

II. DUALITÉ DANS LES EVN

1. Structure et prolongement

Prop : muni de la norme des app lin C^0, E' est complet.

Théorème (Hahn-Banach) : Soit E un evn et $p : E \to \mathbb{R}$ telle que :
(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in E$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ii) $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
Soit $F \subset E$ un sev et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in F$, $\varphi(x) \leq p(x)$
Alors φ peut s'étendre en une forme linéaire sur E dominée par p.

Corollaire : Toute forme linéaire continue sur un sev peut s'étendre en une forme linéaire continue sur E de même norme.

Théorème : $\|x\| = \max_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)|$

Théorème : $x \in \overline{\mathrm{Vect}(y_j)} \iff \left[\varphi(y_j)=0 \ \forall j \Rightarrow \varphi(x)=0\right]$.

Application : théorème de Mönitz-

Prop : $J : E \to E''$, $x \longmapsto |\varphi \mapsto \varphi(x)|$ est une isométrie-

Déf : Un Banach est dit réflexif lorsque J est surjective

Exemple : Un espace de df est réflexif. Un Hilbert aussi.
Contre-ex : $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.

2- Exemples de duaux

Théorème : Pour $1<p<\infty$, $(L^p)' = L^{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$-

Corollaire : L^p, $1<p<\infty$ est un Banach réflexif-

Théorème : $(L^1)' = L^\infty$ et $(L^\infty)'$ --

Théorème : $(c_0)' = \ell^1$, $(\ell^1)' = \ell^\infty$, $(\ell^p)' = \ell^{p'}$, $1<p,q<\infty$.

3- Topologie faible

Déf : On dit que $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $\forall \varphi \in E'$, $\langle \varphi, x_n\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$

Déf On dit que $\varphi_n \rightharpoonup^* \varphi$ lorsque $\forall x \in E$, $\langle \varphi_n, x\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$

Théorème : La boule unité est compacte pour la topologie de la convergence faible-

Théorème : Pour tout evn E il existe un espace topo compact K tq E soit isométriquement isomorphe à un ss-espace de $C(K)$-

III- ESPACES DE BANACH-

1- Résultats fondamentaux hérités du cas métrique

Théorème (Prolongement) Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) des espaces métriques. Soit $A \subset E_1$ une partie dense. On suppose que E_2 est complet-
Toute application uniformément continue $f : A \to E_2$ se prolonge de manière unique en une app° uniformément continue $\gamma : E_1 \to E_2$

Aff : Transformée de Fourier (voir après).

Théorème (Picard). Soit (E,d) complet et soit $f : E \to E$ contractante alors f a un unique point fixe.

Aff : théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème (Baire). Soit (E,d) un espace métrique complet-
Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense-

2- Résultats fondamentaux dans le cas normé-

Théorème (Banach-Steinhaus) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn avec E Banach- Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires c° $E \to F$ telle que $\left[\forall x \in E, \ \sup_i \|T_i x\| < \infty\right]$.
Alors $\sup_i \|T_i\| < \infty$.

Aff : Il existe des fonctions c° périodiques sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier diverge en 0.

Théorème (Application ouverte) Soient E, F Banach et $T : E \to F$ lin c°.
Alors il existe une constante $c>0$ tq $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$

Corollaire (isomorphisme de Banach) Si $T : E \to F$ bijectif, T^{-1} est continu $F \to E$

Théorème (Graphe fermé). $T : E \to F$ lin, E, F Banach-
T est c° $\iff$ le graphe de T est fermé-

Aff : T dans un Hilbert admettant un adjoint. Alors T et T^* sont continus-

3. Algèbres de Banach ?

4. Opérateurs compacts dans un Banach -

Déf: $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dit compact lorsque $T(B_E)$ est relativement compact
On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ev des opérateurs compacts -

Exemple: opérateurs à noyaux (via Ascoli).

Propriétés: (i) $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$ -
(ii) Toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'op. de rang finis est compacte -
(iii) Composition -

Théorème (Alternative de Fredholm). Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ et $T = I - C$.
(i) $\ker T$ est de df (ii) $\operatorname{Im} T$ est fermé.

App: Bases presque orthogonales dans un espace de Hilbert -

III - ESPACES DE HILBERT -

1 - Définitions et prop élémentaires -

Déf: Un espace de Hilbert est un espace muni d'un produit scalaire qui le rend complet -

Ex: $\mathbb{R}^d$, L^2, espace de Sobolev H^s

Théorème (Projection sur un convexe fermé) - Soit $C \subset H$ convexe fermé
Pour tout $x \in H$, $\exists\, P_C(x) \in C$ unique tq $\|x - P_C(x)\| = \inf_{c \in C} \|x - c\|$
P_C est caractérisé par $P_C(x) \in C$ et $\operatorname{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$ $\forall y \in C$

Corollaire: Théorème de Riesz - App: adjoint.

Déf (base hilbertienne) $(e_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ tq $\|e_n\| = 1$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ $n \neq m$ et $\operatorname{Vect}(e_n)$ dense - Ex: Polynômes de Hermite dans L^2.

2 - Le théorème ergodique de Von Neumann -

Déf $\{U(t)\}_t$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de H lorsque $U(0) = Id$, $U(t+s) = U(t)U(s)$ et $U(t)x \xrightarrow[t \to 0]{} x$

Thm Soit $\{U(t)\}$ un sgFC d'op unitaires de H.
(i) $F = \ker U(t) - I$ est fermé (ii) $M(t)g := \frac{1}{t}\int_0^t U(s)g\,ds$ et C^0 et $\forall g \in H$, $\lim_{t \to +\infty} M(t)g = P_F g$ - App: hypothèse ergodique en mécanique statistique

3 - Transformée de Fourier. Espace de Bargmann. Applications -

Déf: La transformée de Fourier $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f \mapsto \left(\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} F(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi}\, dx\right)$ est bien définie et s'étend en un iso de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Prop (Bargmann)

App: Résolution de l'équation de Schrödinger linéaire $\begin{cases} i\partial_t U + \Delta U = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et dans H^s.

Leçon 213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

On peut vraiment faire des merveilles avec cette leçon.

Les résultats généraux ainsi que les formulations variationnelles sont dans le Brézis. La construction de l'espérance conditionnelle se trouve par exemple dans le livre de *Probabilités pour les non probabilistes* de W. Appel. Les résultats sur les signaux à spectre bornés sont inspirés de ce qui se trouve dans l'*Analyse harmonique réelle* de M. Willem. Tout ce qui concerne les polynômes orthogonaux est dans le *Calcul Intégral* de Candelpergher et dans *Objectif Agrégation*. Enfin, le livre de P. D. Lax, *Functional Analysis* contient plein de trucs bien : le lemme de Lax-Milgram (sans blague), le théorème de Radon-Nikodym, le théorème ergodique de Von Neumann, le théorème sur les bases presque orthogonales...

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes
Exemples et Applications -

I. DÉFINITIONS - THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

1. Définitions et premiers exemples -

Déf - Un espace de Hilbert est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ (hermitien lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) qui est complet pour la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Ex : $\mathbb{C}^d$ muni du p.s : $\langle x, y \rangle = \sum \overline{x_i} y_i$ (coordonnées dans une base)

Prop (Cauchy-Schwarz) Un p.s sur un ev. E vérifie toujours :
$\forall x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité ssi x et y sont liés -

Prop (Parallélogramme) Pour la norme associée à un ps on a :
$\forall x, y \in E$, $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$.

Ex : L'espace $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$ est un espace de Hilbert -

Ex : L'espace $L^2(X, \mu) = \{ f \text{ mesurable tq } \int_X |f|^2 d\mu < +\infty \}$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x)$ est un Hilbert.

Ex : L'espace $BL^2 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{Supp} \hat{f} \subset [-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}] \}$ muni de la structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert -

Déf : $x, y \in H$ sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. Dans ce cas $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagore)

2. Théorème de projection -

Thm (Projection sur un convexe fermé). Soit C une partie fermé convexe non vide d'un espace de Hilbert H. Pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que :

(1) $\|x - p_C(x)\| = d(x, C) := \inf_{c \in C} \|x - c\|$.

(2) Il est caractérisé par $p_C(x) \in C$ et :
$\forall z \in C$, $\operatorname{Re} \langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0$.

De plus $\forall x_1, x_2 \in E$, $\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

Ex : Dans $\mathbb{R}^d$, si $C = \bar{B}(0,1)$ alors $p_C(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

C-ex : $H = L^2(0,1)$, $C = \mathbb{R}[X]$ est convexe mais pas fermé : il est dense (Weierstrass)

C-ex : Sans complétude : $C([0,1])$ muni du p.s de $L^2(0,1)$.

App (Hahn-Banach dans un Hilbert réel) H Hilbert réel, A et B convexes non vides disjoints avec A fermé et B compact alors il existe une forme linéaire $\varphi \in H^*$ telle que $\sup_{a \in A} \varphi(a) < \inf_{b \in B} \varphi(b)$.

App : Un convexe fermé d'un Hilbert réel est égal à l'intersection des demi espaces qui le contiennent -

Thm Si F est un sous-espace fermé de H, alors pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique élément de H vérifiant $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp = \{ y \in H, \forall f \in F, \langle f, y \rangle = 0 \}$
L'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue, surjective et $H = F \oplus F^\perp$

App : Un sev $F \subset H$ est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

App (construction de l'espérance conditionnelle)

3. Dualité dans un espace de Hilbert.

Thm (Riesz) L'application $\Phi : H \to H'$, $y \mapsto [x \mapsto \langle y, x \rangle]$ est une isométrie surjective - Ainsi $H \simeq H'$.

App : Si $T : H \to H$ est un endomorphisme continu il existe un unique $T^* : H \to H$ appelé opérateur adjoint de T tq $\forall x, y \in H$, $\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle$.
L'adjoint vérifie $(ST)^* = T^* S^*$; $T^{**} = T$ et $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$.

Ex : La transformée de Fourier définie par $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u \mapsto \hat{u}$ où $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$ ainsi que $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u \mapsto \mathcal{F}^* u$ où $\mathcal{F}^* u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi$ s'étendent en des isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et sont alors adjoints. De plus $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^* \mathcal{F} = id$.

App : Le théorème de Radon-Nikodym

II - PREMIÈRES APPLICATIONS -

1. Convergence faible.

Déf : Une suite $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ lorsque : $\forall y \in H$, $\lim_{n\to+\infty} \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$. On note $x_n \rightharpoonup x$

Ex : Dans $L^2(0,1)$, $e^{int} \rightharpoonup 0$. (Riemann-Lebesgue)

Thm : De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

App (minimisation des fonctionnelles convexes). Soit $U \subset H$ convexe fermé non vide. Soit $J : H \to \mathbb{R}$ convexe dérivable coercive. Alors il existe au moins un élément $u \in U$ tel que $J(u) = \inf_{v\in U} J(v)$.

2. Formulation variationnelle de problèmes aux limites - (dim. 1)

Soit à résoudre : $(*)\begin{cases} -u'' + u = f \in C([0,1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ au sens des distributions

Déf : H^1_0 est la fermeture de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H^1(0,1) = \{u \in L^2(0,1), \frac{du}{dx} \in L^2(0,1)\}$. C'est un espace de Hilbert pour le p.s $\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u', v'\rangle_{L^2} + \langle u, v\rangle_{L^2}$

Déf : On appelle solution faible de $(*)$ toute fonction $u \in H^1_0(0,1)$ tq $\forall v \in H^1_0(0,1)$, $\int_{(0,1)} u'v' + \int_{(0,1)} uv = \int_{(0,1)} fv$

Thm Le pb $(*)$ admet une unique solution faible pour $f \in L^2(0,1)$. Si de plus $f \in C([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ et est solution forte.

Soit à résoudre $(**)$ $\begin{cases} -(pu')' + qu = f \text{ sur } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$, $p \in C^1([0,1])$, $q \in C([0,1])$

Thm (Lax-Milgram) Soit H Hilbert, a une forme bilinéaire sym $\forall$ $q \geq 0$. C^0 coercive i.e. $\forall x,y \in H$, $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ et $\exists \alpha > 0$, $|a(x,x)| \geq \alpha \|x\|^2$.
Alors pour toute forme linéaire ℓ sur H, il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in H$, $\ell(x) = a(y,x)$. De plus y est l'unique minimiseur de $J(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - \ell(x)$.

Déf. On appelle solution faible solution faible de $(**)$ toute $u \in H^1_0$ tq $\int_{(0,1)} pu'v' + \int_{(0,1)} quv = \int_{(0,1)} fv$, $\forall v \in H^1_0$.

Thm. Même conclusion que le thm précédent en supposant $p(x) \geq \alpha > 0$

Rem : Utilise l'inégalité de Poincaré : $\forall u \in H^1_0(0,1)$, $\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$

III - BASES HILBERTIENNES -

1. Définition.

Déf Une partie $(e_i)_{i\in I}$ de H est dite orthonormée lorsque $\forall i,j \in I$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$

Déf : Une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne lorsqu'elle engendre un sous-espace dense dans H (pour $\|\cdot\|$).

Prop : Un espace de Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

Ex : Dans $\ell^2(\mathbb{C})$, $e_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ forme une base hilbertienne.

Thm (caractérisation) Il y a équivalence entre :
(i) La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne
(ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$ au sens où $\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n\| = 0$.
(iii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2$ (Parseval)
(iv) $\{e_n, n\in\mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ et $\Delta : \begin{cases} H \to \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \mapsto (\langle e_n, x\rangle)_n \end{cases}$ est une isom. surjective

Rem (Bessel) Dans un préhilbertien, $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Ex : Dans BL^2, $f_n : t \mapsto \operatorname{sinc}(\pi\nu_e(t - nT_e))$ où $T_e = \frac{1}{\nu_e}$ est une base hilbertienne.

App (échantillonnage de Shannon) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{Supp}\hat{f} \subset [-\nu, \nu]$ alors si $\nu_e \geq 2\nu$ alors $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\operatorname{sinc}(\pi\nu_e(\cdot - nT_e))$ [~~UTILISE POISSON~~ voir APRÈS]

2. Théorie hilbertienne des séries de Fourier.

Thm (Fejer) $L^2(0,1)$ admet pour base hilbertienne $\{x \mapsto e^{2i\pi nx}, n\in\mathbb{N}\}$.

App : (avec Parseval) calcul de $\zeta(2)$ en périodisant $\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} \in L^2(0,1)$.

App (Poisson) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $|f(x)| = O(|x|^{-\alpha})$ et $|\hat{f}(x)| = O(|x|^{-\beta})$ avec $\alpha, \beta > 1$. Alors $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+ka) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n}{a})\exp(2i\pi n\frac{t}{a})$

App (Équation de la chaleur périodique) $\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u(t,x), \ x \in [0,1], \ t > 0 \\ \lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x), \ \forall x \in [0,1] \end{cases}$.
avec $u_0 \in C^2$. Possède une unique solution.

3. Polynômes orthogonaux

Thm (Gram-Schmidt). Si (x_n) est une famille libre d'un espace pré-hilbertien, il existe une unique famille orthonormée telle que $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_n)$ $\forall n$ et $\langle e_n, x_n\rangle > 0$.

Déf. Soit $w \geq 0$ une fonction poids. On appelle polynômes orthogonaux pour w l'unique suite de polynômes unitaires (P_n) obtenue par orthogonalisation de $(X^n)_{n\geq 0}$ pour le produit scalaire de $L^2(w\,dx)$.

Ex : $w = \mathbb{1}_{]-1,1[}$ - (Polynômes de Legendre). Le polynôme P_n a n racines réelles $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ distinctes dans $(-1,1)$.

App (intégration numérique). Pour tout polynôme f de degré $2n-1$ on a $\int_{]-1,1[} f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha_i$ où les α_i sont explicitement calculables.

Ex : $w(x) = e^{-2\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$ (polynômes de Hermite H_n).

Prop : $H_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1/4}\pi^{n/2}\sqrt{n!}} e^{2\pi x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right)$, $H_0 = 1$

Déf / Prop Les fonctions d'Hermite $h_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Déf (transformée et espace de Bargmann) On appelle espace de Bargmann l'image de $L^2(\mathbb{R})$ par $B : L^2(\mathbb{R}) \to H(\mathbb{C})$, $f \mapsto \left[Bf : z \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\langle h_n, f\rangle\right]$ C'est un espace de Hilbert pour $\langle Bf, Bg\rangle := \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$.

App : La transformée de Fourier dans l'espace de Bargmann est une rotation. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, h_n = (-i)^n h_n$ (diagonalisation de $\mathcal{F}$).

IV. OPÉRATEURS ET THÉORIE SPECTRALE DANS UN HILBERT.

1. Opérateurs unitaires.

Déf : Un opérateur $T : H \to H$ est dit unitaire lorsque $TT^* = \mathrm{id}$.

Ex : La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Thm (Von-Neumann) Soit $\{U(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs unitaires de H (i.e. $U(0) = \mathrm{id}$ et $U(t+s) = U(t)U(s)$)

- On note $F = \bigcap_{t\geq 0} \mathrm{Ker}(U(t) - I)$ le sous-espace fermé des points fixes.
- On définit $M(t)g = \frac{1}{t}\int_0^t U(s)g\,ds$, $t > 0$ (moyenne temporelle)

Alors pour tout $t > 0$, $M(t)$ est un opérateur continu de norme ≤ 1 et $\forall g \in H$, $\lim_{t\to+\infty} M(t)g = P_F(g)$.

App : L'hypothèse ergodique en mécanique statistique.

2. Opérateurs compacts et espaces de Hilbert.

Déf. Un opérateur $T : X \to X$ d'un espace de Banach est dit compact lorsque $T(\bar{B}(0,1))$ est relativement compact.

Prop (Fredholm). On note $T = I - C$. Alors : $\mathrm{Im}(T)$ est fermée et si T est injectif alors T est surjectif.

App (bases presque orthogonales). Soit H un Hilbert muni d'une base hilbertienne $\{x_n\}$. Soit $\{y_n\} \subset H^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \|x_n - y_n\|^2 < \infty$. Si $\{y_n\}_n$ est libre alors c'est une famille totale. En particulier si les $\{y_n\}$ sont orthonormée alors c'est une base hilbertienne.

3. Opérateurs auto adjoints compacts d'un espace de Hilbert.

Thm : Si $T : H \to H$ est normal ($T^*T = TT^*$) et compact alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. Si T est auto-adjoint alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

4. EDP linéaires d'évolution : résolution de l'équation de Schrödinger linéaire

($e^{it\Delta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ puis dans H^s).

↑ c'est un semi-groupe.

Leçon 214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Pas facile...

À noter le lemme de Milnor et la preuve du théorème de Brouwer dans Gonnord, Tosel, *Calcul différentiel* ainsi qu'un certain nombre de trucs sur les sous-variétés, la simplicité des $SO_n(\mathbf{R})$, les lemmes d'immersion, submersion, rang constant et Morse (à voir aussi dans Avez, *Calcul différentiel*)...

214 - Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites - Exemples et applications en analyse et en géométrie.

I - THÉORÈMES D'INVERSION

1 - Inversion locale.

Déf : On dit que f est un C^k-difféomorphisme sur son image lorsque f est de classe C^1, injective et de réciproque de classe C^k.

Théorème (inversion locale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. Supposons que en $a \in U$, $df(a)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$) et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tel que f soit un C^k-difféomorphisme $V \to W$.

Rem : vrai dans des espaces de Banach -

C-ex : $x \mapsto x^2$ pas un difféomorphisme en 0.

C-ex : $f : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable mais pas C^1. $f'(0) \neq 0$ mais f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

C-ex : $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféo local en tout point de U mais n'est pas un difféo global.

Ex : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est un difféo d'un voisinage de 0 vers un voisinage de I_n.

App : Il existe un voisinage V de l'identité dans $GL_n(K)$ tq le seul groupe de $GL_n(K)$ inclus dans V soit le groupe trivial

App : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. et $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

App : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \mapsto B^k$ est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de l'identité sur son image -

App : régularité d'une racine simple d'un polynôme -

Thm (inversion locale holomorphe). Si $f \in \mathcal{H}(U)$ avec U ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $V \subset U$ voisinage ouvert de z_0 et W voisinage ouvert de $f(z_0)$ tq f C^∞-difféo $V \to W$ et f^{-1} holomorphe.

App : Une application holomorphe non constante est ouverte -

2 - Inversion globale.

Thm (inversion globale). Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ C^k. f est un C^k-difféomorphisme de U sur son image ssi elle est injective en tout point et sa différentielle est inversible.

Coro : Dans ce cas f est ouverte.

Thm (inversion globale holomorphe). Si $f \in \mathcal{H}(U)$ est injective sur U ouvert de $\mathbb{C}$ alors f est un C^∞-difféomorphisme de $U \to f(U)$ et f^{-1} est holomorphe -

Ex : $U = \mathbb{R}_+^*$ $f : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est un C^1-difféomorphisme global.

App (lemme de Milnor). Soient K un compact inclus dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. et Ω un ouvert contenant K tel que $\overline{\Omega}$ compact inclus dans U. Soit $v : U \to \mathbb{R}^n$ C^1 et pour $t \in \mathbb{R}$, $v_t : U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + tv(x)$. Il existe $\gamma > 0$ tq $\forall |t| < \gamma$, $\det(dv_t(x)) > 0$ et $\int_K \det(dv_t(x))\,dx = \mu(v_t(K))$

App (Brouwer). Soit $f : \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$ C^0, alors f a un point fixe dans $\bar{B}(0,1)$

Thm (Hadamard-Lévy). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^2 tq pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ inversible. Si f est propre (ie. $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$) alors f est un C^1-difféo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

3. Formes canoniques

Cadre : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ C^k, $f(0) = 0$.

Déf. Si $df(0)$ est injective on dit que f est une immersion en 0.
Si $df(0)$ est surjective on dit que f est une submersion en 0

Lemme (immersion) Il y a équivalence entre :

(i) f est une immersion (ii) $\exists h : U \to V$ C^k-difféo entre des voisinages de 0 tq $h \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

Lemme (submersion). Il y a équivalence entre :

(i) f est une submersion (ii) $\exists h : U \to V$ C^k-difféo entre des voisinages de 0 tq $h \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$.

Théorème (rang constant). Il y a équivalence entre :

(i) Au voisinage de 0, $\operatorname{rg} df$ est constant.

(ii) $\exists h_1$ (resp h_2) C^k difféo local de $(\mathbb{R}^n, 0)$ (resp $(\mathbb{R}^p, 0)$) dans lui-même de sorte que $h_2 \circ f \circ h_1(x, y) = (x, 0)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$.

App (Lemme de Morse). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^k, $k \geq 3$ avec $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de forme quadratique associée q_0. Alors il existe un C^{k-2}-difféo φ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^n, 0)$ tq dans un voisinage de 0, $f(x) = \frac{1}{2} q_0(\varphi(x))$

II. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

1. Le théorème

Théorème (fonctions implicites). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ C^1. On suppose que $f(a, b) = 0$ et $\det D_y f(a, b) \neq 0$. Alors il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et $\varphi : V \to W$ C^1 unique tel que $[(x, y) \in V \times W \text{ et } f(x, y) = 0] \iff [x \in V \text{ et } y = \varphi(x)]$.
De plus φ est dérivable en a et on peut calculer sa différentielle.

Rem : On peut remplacer C^1 par C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^1 par holo.

Exemple : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - On a :
$V_1 =]-1, 1[$, $W_1 =]0, \infty[$, $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$
$V_2 =]-1, 1[$, $W_2 =]-\infty, 0[$, $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.
Sur chacun des ouverts $2x + 2yy' = 0 \iff \varphi'(x) = -\frac{x}{y}$.

App : régularité d'une racine simple d'un polynôme -

App : Résolution approchée d'une équation

App : $PV = nRT$ [Rouvière] -

Équivalence avec le TIL.

2- Applications en théorie des équations différentielles ordinaires

App Soit $f : I \times \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$, $(t,x,\lambda) \mapsto f(t,x,\lambda)$ C^1. L'équation différentielle $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),\lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ a une unique solution locale qui dépend de façon C^1 de x_0 et de λ.

On étudie le système de van der Pol : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - \varepsilon(x^2-1)y \end{cases}$ qui possède une unique solution globale pour tout $\varepsilon > 0$. Ci : $\begin{cases} x(0) = \xi \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Prop Il existe une fonction $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ définie dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ telle que $\beta(0) = 2\pi$ et tq pour tout $\varepsilon > 0$ dans le domaine de définition de β, $(\gamma \circ \rho)$ a une orbite périodique avec Ci $(\beta(\varepsilon), 0)$.

3- Applications à l'optimisation

Théorème (extremaliés). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Soit $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, C^1 sur Ω. Soit $U = \{v \in \Omega,\ \varphi_i(v) = 0,\ 1 \le i \le m\} \subset \Omega$. Soit $u \in U$ tq $d\varphi_i(u)$ soient linéairement indépendantes. Soit $J : \Omega \to \mathbb{R}$ dérivable en u. Si la fonction J admet un extremum relatif en u par rapport à U alors il existe $\lambda_i(u)$, $1 \le i \le m$ uniques tq $\nabla J(u) + \sum \lambda_i(u) \nabla \varphi_i(u) = 0$.

III - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

1- Sous-variétés

Def $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p dans $\mathbb{R}^n$ lorsque pour tout $x \in M$, $\exists$ U et V vois. ouverts de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféo $\varphi : U \to V$ tq $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ de classe C^k

Thm Il y a équivalence entre :

(i) M est une ss-variété de dim p de $\mathbb{R}^n$ (ii) $\forall a \in M$, $\exists U$ ouvert contenant a et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ submersion tq $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$.

(iii) $\forall a \in M$, $\exists$ un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant a, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ immersion qui est un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

(iv) $\forall a \in M$, $\exists$ un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et $G : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ C^k tq à permutation des coordonnées près, $U \cap M$ soit le graphe de G.

Ex : S^n est une sous-variété. **C-ex** : le cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ n'en est pas une

2- Espace tangent

Def : v est dit tangent en $a \in M$ lorsqu'il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Def : L'ens des vecteurs tangents est appelé espace tangent. C'est un sev de dimension p.

3- Application aux sous-groupes du groupe linéaire, des groupes matriciels

Prop : $SL_n(K)$, $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ sont des sous-variétés réelles.

Théorème (Cartan von Neumann). Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

Leçon 215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Voir Avez, *Calcul différentiel* et Ciarlet pour la partie optimisation.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ - Exemples et applications -

I - GÉNÉRALITÉS SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ

1 - Applications différentiables -

Cadre : U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F un evn et $f : U \to F$ une application

Déf : On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe une application linéaire continue $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ telle que
$f(a+h) = f(a) + df(a)h + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$.

Propriétés : - $df(a)$ est unique et ne dépend pas de la norme équivalente choisie
- Une application différentiable en a est continue en a -

Déf : On dit que f est C^1 lorsque l'application $U \to \mathcal{L}(E,F)$, $x \mapsto df(x)$ est continue -

Ex : et C-ex

2 - Règles de calcul - Différentielles partielles

Thm (composition) : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Supposons f différentiable en $a \in E$ et g en $f(a) \in F$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

Thm (Leibniz) : Soient $f : E \to F_1$ et $g : E \to F_2$ et $b : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue. Supposons f et g différentiable en $a \in E$. Alors $b(f,g)$ est différentiable en a avec :
$d(b(f,g))(a)h = b(df(a).h, g(a)) + b(f(a), dg(a).h)$, $h \in E$

App : différentielle de l'inverse

Déf (différentielle partielle) : On appelle différentielle partielle de $f : \mathbb{R}^n \to F$ en $a = (a_1, \dots, a_n)$ relativement à la i-ème variable, la différentielle de $x \in \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ en a_i lorsqu'elle existe. On la note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$.

Prop : Si f est différentiable en a alors les différentielles partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent et :
$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

C-ex : $f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2+y^2)^{-1} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$ possède des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'y est pas continue -

Rem : Si f est C^1, les différentielles partielles le sont aussi

App : (théorème de Rademacher) - Toute fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitzienne est différentiable presque partout -

Thm (changement de variable) : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq n$ des fonctions différentiables en a. On suppose que f est différentiable en $b = (g_1(a), \dots, g_n(a))$. Alors $x \mapsto f(g_1(x), \dots, g_n(x))$ est différentiable en a de différentielle partielle i-ème : $\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}(b) \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(a)$

Aff : Calcul du laplacien en coordonnées polaires.

2. Théorèmes de la moyenne

Thm (Accroissements finis) - Soient U un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}^n$ $f : U \to F$ différentiable. S'il existe $k \geq 0$ tq $\|df(u)\| \leq k$ pour tout $u \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k \cdot \|b - a\|$ pour tous $a, b \in U$.

Aff : si $df(u) = 0$ pour tout $u \in U$ alors f est constante -

Aff : Si f admet des dérivées partielles continues en tout point alors f est $\mathcal{C}^1$.

Thm (fondamental) Si F est un espace de Banach et $f : U \to F$ $\mathcal{C}^1$ U convexe, alors, $\forall x, y \in U$, $f(x+y) = f(y) + \int_0^1 df(x + ty)\, y \, dt$ -

3. Différentielles d'ordre supérieur, formules de Taylor

II - THÉORÈMES D'INVERSION -

1 - Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites -

III - APPLICATIONS À L'OPTIMISATION

Leçon 218

Applications des formules de Taylor.

Une bonne partie de l'analyse est un immense développement de Taylor. Les numériciens l'ont bien compris.

J'inclus le plan réalisé en oral blanc pour comparer.

218 Applications des formules de Taylor

I - LES FORMULES DE TAYLOR -

1. Outils

E et F sont des evn de dimension finie et U est un ouvert de E.

Théorème : Si $f \in C^1$ sur U et si $[a, a+h] \subset U$ alors
$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 df(a+th).h\,dt.$$

Théorème (AF) Si $f \in C([a,b], F)$ et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$ sont différentiables sur $[a,b]$, si $\|f'\| \leq g'$ sur $[a,b]$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

2. Les formules.

Si $f : U \to F$ et $a \in U$, si f est C^n sur U, on note :
$$R_n^a(h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(a).(h, \dots, h).$$

Théorème (Reste intégral). Si f est C^{n+1} sur U et $[a, a+h] \subset U$ alors :
$$R_n^a(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(a+th).(h, \dots, h)\,dt.$$

Thm (Taylor-Lagrange). Si $[a, a+h] \subset U$ et f $(n+1)$ fois différentiable sur U.
$$\|R_n^a(h)\| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,a+h]} \|d^{n+1} f\|. \qquad (TL)$$

Thm (Taylor-Young) Si f est n-fois différentiable en a, alors :
$$R_n^a(h) = o(\|h\|^n).$$

3. Cas particuliers

- En dimension 1, on peut écrire les formules avec des dérivées n-ièmes et (TL) devient : $\exists c \in]a,b[$, $R_n^a(b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.
- Si f est polynomiale de degré n_0, $\forall n > n_0$, $R_n^a(h) = 0$.

4. Fonctions analytiques -

Déf. Une fonction analytique est une fonction de la variable réelle ou complexe définie sur U telle que pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall z \in B(z_0, r),\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour une certaine suite } (a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Prop. Une fonction analytique est C^∞ et les coefficients $(a_n)_n$ sont uniquement définis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = f^{(n)}(z_0) \frac{1}{n!}$.

Ex : $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, les fonctions trigonométriques.

C-ex : $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est C^∞ mais pas analytique en 0.

Thm (Mergenstein) Il existe un G_δ dense de fonction C^∞ réelle analytiques nulle part.

Ex : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{n!^n}$ est C^∞ analytique nulle part.

Thm (Bernstein). Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On suppose $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$. Alors f est analytique sur $]-a, a[$.

Thm (Borel). Toute série entière de rayon de CV > 0 est le développement de Taylor d'une fonction C^∞.

II - APPLICATIONS EN ANALYSE RÉELLE -

1 - Développements limités

Déf. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton avec $0 \in I$. Soit $f : I \to E$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 (noté $DL_n(0)$) lorsqu'il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tq $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

Prop : Si f admet un $DL_n(0)$, il est unique.

Prop : Si f admet un $DL_n(0)$ alors $f(0) = 0$ et f dérivable en zéro avec $f'(0) = a_1$.

C-ex : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $f(0)=1$ admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Prop : Si f est dérivable n fois en 0, elle admet un $DL_n(0)$ (TY).

2- Étude des extrema locaux -

[Ciarlet] voir leçon 219 + rajouter cas $\mathbb{R}^2$ ((+ lemme de Morse ...))

3- Étude asymptotique -

voir leçon 224 : Laplace & co

III - PROBLÉMATIQUES NUMÉRIQUES

1- Recherche de points fixe - Résolution d'équations - (QSS)

Thm : Soit $x_0 \in [a,b]$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$ pour $k \geq 0$. On suppose :
(1) $\forall x \in [a,b]$, $\phi(x) \in [a,b]$ (2) $\phi \in C^1([a,b])$ (3) $\exists K < 1$, $\|\phi'\|_{\infty,[a,b]} \leq K$.
Alors ϕ a un unique point fixe α dans $[a,b]$, $x_k \to \alpha$ pour tout choix $x_0 \in [a,b]$ et $\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha)$.

Prop : Si $|\phi'(\alpha)| < 1$, il y a convergence pour x_0 choisi dans un voisinage de α.

Def : On dit que la convergence est d'ordre p lorsque $\exists C > 0$, $\forall k$, $\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p} \leq C$.

Prop : Si $\phi \in C^{p+1}([a,b])$. Si $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ alors la méthode de point fixe est d'ordre $p+1$ avec
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

App : Méthode de Newton pour la recherche d'un zéro d'une fonction dans un intervalle (ordre 2, Newton modifié etc).

2. Interpolation

Ici, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. $x_i = x_0 + ih$

Thm (Lagrange) : Il existe un unique polynôme $\Pi_n f$ de degré n tel que $\Pi_n f(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. Il s'écrit :
$$\Pi_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)} f(x_i) \quad \text{où } \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Prop : * Si $f \in C^{n+1}([a,b])$, $f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$. où $\xi \in (a,b)$
* il existe des fonctions très régulières tq $\lim_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n f\|_\infty = +\infty$.

Théorème (spline) Il existe une unique fonction $s_n f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq
(i) $s_n f \in C^2([0,1])$, (ii) $s_n f |_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un pol de degré 3
(iii) $s_n f(x_i) = f(x_i)$ (iv) $(s_n f)'(0) = f'(0)$ et $(s_n f)'(1) = f'(1)$.

Erreur

3- Intégration numérique / EDO (ass)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction intégrable. On note $I(f)=\int_a^b f$.

But : Approcher $I(f)$ par une formule de quadrature $I_n(f)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f(x_i)$ $|x_{i+1}-x_i|=h$.

Déf : L'ordre de la méthode est le plus grand $r\in\mathbb{N}$ tq pour tout polynôme de degré $\le r$, $I_n(f)=I(f)$.

Rectangle $\alpha_i=x_{i+1}-x_i$, $|I(f)-I_n(f)|\le \frac{h(b-a)}{2}M$ si $f\in C^1$, ordre 0.

Point milieu : $x_i=$

trapèze

simpson.

Alt : EDO.

Éventuellement : polynômes orthogonaux, quadrature de Gauss.

4- Schémas numériques aux différences finis pour les EDP

On cherche une méthode pour approcher la solution de $\begin{cases}\partial_t u=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0,1)\times\mathbb{R}_+\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}$.

$\Delta t>0$, $\Delta x=\frac{1}{N+1}$, $(t_n,x_j)=(n\Delta t, j\Delta x)$. On pose $v_j^0=u_0(x_j)$ et

$F(\{v_j^n\}_j)=\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+\theta\nu\frac{-v_{j-1}^{n+1}+2v_j^{n+1}-v_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\theta)\nu\frac{-v_{j-1}^{n}+2v_j^{n}-v_{j+1}^{n}}{\Delta x}=0$

Thm le θ-schéma est :

- consistant d'ordre $(1,2)$ pour $\theta\neq\frac12$ et $(2,2)$ pour $\theta=\frac12$
- stable en norme L^2 inconditionnellement si $\frac12\le\theta\le1$ et ss condition CFL si $0\le\theta<\frac12$

Thm (Lax) Le θ-schéma est convergent au sens où $\forall T>0\ \lim_{\Delta t,\Delta x\to0}\left(\sup_{t_n\le T}\|e^n\|_{\ell^2}\right)=0$ où $e_j^n=v_j^n-u(t_n,x_j)$.

IV. APPLICATIONS À LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE DES MESURES DE PROBABILITÉ

1. Définition, propriétés

Déf. Soit μ une mesure de proba sur $(\Omega,\mathbb{P})$. La fonction caractéristique de μ est $\phi(t)=\int e^{itx}\mu(dx)$. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle est $\phi(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]$.

Thm. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X vérifie (i) $\phi(0)=1$, $|\phi(t)|\le1\ \forall t\in\mathbb{R}$ (ii) ϕ est uniformément continue. (iii) si $\mathbb{E}(|X|^k)<\infty$ alors ϕ est k-fois différentiable et $\phi(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{\mathbb{E}(X^j)(it)^j}{j!}+o(t^k)$ en particulier $\forall j\in\{1,\dots,k\}$, $\phi^{(j)}(0)=i^j\mathbb{E}(X^j)$. (iv) Réciproquement, si $\phi^{(2k)}(0)$ existe et est fini alors $\mathbb{E}(|X|^{2k})<\infty$.

Thm (Lévy) $X_n\Rightarrow X$ en loi ssi $\phi_n\to\phi$ simplement.

2. Le théorème Central-Limite

Thm (Central limite). Soit $(X_n)_n$ une suite de var iid avec moyenne μ et variance σ^2. On note $S_n=X_1+\dots+X_n$. Alors $\frac{S_n-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\Rightarrow X$ où $X\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Alt :

3- Le problème des moments

Théorème - Soit $(\mu_k)_k$ une suite de réels vérifiant $\limsup_{k\to+\infty}\frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k}<\infty$ alors il existe au plus une fonction de répartition dont les moments sont les μ_k.

Alt : La loi normale est caractérisée par ses moments.

App (méthode des moments). Soit (X_n) une suite de v.a. réelles tq pour tout $k\in\mathbb{N}$ la suite des moments $\mu_k^{(n)}=\mathbb{E}(X_n^k)$ ait une limite μ_k avec $\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k}<+\infty$ alors $(X_n)_n$ CV en loi vers l'unique var dont les moments sont les μ_k.

Applications des formules de Taylor

218

I. LES FORMULES DE TAYLOR.

1. En dimension 1

Thm 1 (Reste intégral). Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $f:[a,b]\to E$ une application C^{n+1}.
Alors : $f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

Ex.2 : Si f est un polynôme de degré n, le reste intégral est nul.

Thm 3 (Taylor-Lagrange) On suppose $f:[a,b]\to E$ C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M>0$ tel que $\forall t\in]a,b[$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \le M$. Alors :
$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \le M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Thm 4 (Taylor-Young) Soient $n\in\mathbb{N}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ C^n sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h\to 0$, on a :
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Ap 5 : $\forall x\ge 0$, $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

2. En dimension supérieure

Cadre : E, F evn, $a\in E$, U voisinage ouvert de a dans E, $f:U\to F$.

Déf. 6 : Si f est n fois différentiable au point a, alors pour $h\in E$ assez petit, on définit : $r_n(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} d^m f(a) h^m$

En appliquant I.1/ à $g: t \mapsto f(a+th)$ on a :

Thm 7 Les formules de Taylor deviennent :

(reste intégral) $r_n(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(a+th)\cdot h^{n+1}\,dt$.

(Taylor-Lagrange) $\|r_n(h)\| \le \frac{1}{(n+1)!} M \|h\|^{n+1}$ où M majore $\|d^{n+1} f\|$ sur $]a,a+h[$

(Reste de Lagrange) Si $f:U\to\mathbb{R}$ C^n et $(n+1)$ fois diff sur $]a,a+h[$, alors il existe $\theta\in]0,1[$ tel que : $r_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(a+\theta h)\cdot h^{n+1}$

3. Série de Taylor, analyticité

Thm 8 (Borel) Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Il existe une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $a_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ap 9 : Toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a,b]$ avec des dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Déf 10 (analyticité). Une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0\in\Omega$, il existe $r>0$ tel que $B(z,r)\subset\Omega$ et $\forall z\in\Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Ex. 11 : Les séries entières sont analytiques dans leur disque ouvert de convergence.

Prop 12 Une fonction analytique réelle est C^∞ et $f^{(n)}(z_0) = n!\,c_n$.

Prop 13 (prolongement). Deux fonctions analytiques qui coïncident sur un ouvert connexe de Ω coïncident sur tout Ω (Ω connexe).

Thm 14 (Bernstein) Soient $a>0$ et $f:]-a,a[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x)\ge 0$. Alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

Thm 15 (Morgenstern) Il existe un G_δ dense (pour la topologie de la distance $d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \min(2^{-n}, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_{\infty,[0,1]})$) de fonctions $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ analytiques nulle part.

II. APPLICATIONS EN ANALYSE RÉELLE.

1. Développements limités

Déf 16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton. Soit $f:I\to E$ et supposons $0\in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe $a_0,\dots,a_n\in E$ tels que au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$.

Prop. 17 : Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, il est unique

Prop. 18. Si f admet un DL_n au voisinage de 0, alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

C-ex 19 : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ n'est pas deux fois dérivable en 0 mais admet un DL_2 en 0.

Prop. 20 : Si $f : I \to E$ est n fois dérivable en 0 alors $r_n(x)$ est un $DL_n(0)$ de f.

Ex. 21 : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

2. Applications à la recherche d'extrema locaux d'une fonction numérique.

Thm. 22 (identité d'Euler). Soit Ω un ouvert d'evn et $J : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Si J admet un extremum local en $u \in \Omega$ et si J est différentiable en u, alors $\nabla J(u) = 0$.

Thm 23. Si $J : \Omega \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $u \in \Omega$ et si J est deux fois différentiable en u, alors $\nabla^2 J(u)(w, w) \geq 0$ pour tout $w \in V$.

Thm 24 Si $J : \Omega \to \mathbb{R}$ et $u \in \Omega$ tel que J soit différentiable en $u \in \Omega$ avec $\nabla J(u) = 0$, on a :

(1) Si J est deux fois - diff en u et s'il existe α tel que $\alpha > 0$ et $\nabla^2 J(u)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2$ pour tout $h \in V$ alors J admet un minimum relatif strict en u.

Aff. 25 : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, la résolution du système linéaire $Ax = b$ est équivalente au problème de minimisation de $\Phi(y) = \frac{1}{2}\langle y, Ay \rangle - \langle y, b \rangle$.

3. Équivalents d'intégrales à paramètre

Thm 26 (Laplace). Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement non borné), $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ C^2, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ C^0 telles que :

$F(x) = \int_a^b e^{x\varphi(t)} f(t)\, dt$ soit bien définie et C^0 sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Si φ atteint un maximum en un unique point $t_0 \in]a, b[$ (i.e. $\varphi'(t_0) = 0$, $\varphi''(t_0) < 0$ et $\varphi'(t) \neq 0$ si $t \neq t_0$) avec $f(t_0) \neq 0$ alors

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{x\varphi(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(2) Si φ atteint son maximum en un unique point $t_0 = a$ ~~ou b~~ et si φ' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et si $f(t_0) \neq 0$ alors :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{x\varphi(a)} \frac{f(a)}{-\varphi'(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Aff 27 (Stirling) $\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{x+1} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

III. APPLICATIONS EN ANALYSE NUMÉRIQUE.

1. Recherche de zéros : méthode de Newton

Thm 28 On considère la suite $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ où :

1. $\phi : [a, b] \to [a, b]$ 2. $\phi \in C^1([a, b])$ 3. $\exists K < 1, \forall x \in [a, b], |\phi'(x)| < K$

Alors ϕ a un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$ et $(x^{(k)})_k$ converge vers α pour tout choix $x^{(0)} \in [a, b]$. De plus : $\lim_{k \to +\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$

Thm 29 (Newton) Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1, $x^* \in \mathbb{R}^n$, $F(x^*) = 0$.

On suppose qu'il existe $R, C, L > 0$ telles que :

1. $dF^a(x^*)^{-1}$ existe et $\|dF(x^*)^{-1}\| \leq C$
2. $\forall x, y \in B(x^*, R)$, $\|dF(x) - dF(y)\| \leq L\|x - y\|$

Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x^{(0)} \in B(x^*, r)$ la suite $x^{(k+1)} = x^{(k)} - dF(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$ est bien définie et converge vers x^* avec $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq CL\|x^{(k)} - x^*\|^2$

2- Schémas numériques pour les EDP linéaires.

Cadre : on considère l'équation de la chaleur $\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \nu \partial^2_{xx} u(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

Pour $t>0$, $x \in (0,1)$. On pose $\Delta t > 0$, $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$.

On appelle $u_j^n \approx u(t_n, x_j)$ une approximation de la solution u au point (t_n, x_j).

On suppose $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $\theta \in [0,1]$ on définit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu\theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Déf 30. (consistance). Un schéma de la forme $F(\{u_j^n\}) = 0$ est consistant d'ordre q en temps et p en espace lorsque pour u solution exacte (supposée régulière) : $F(\{u(t_n, x_j)\}) = O((\Delta t)^q + (\Delta x)^p)$.

Ex 31 le θ-schéma est consistant $O(\Delta t + (\Delta x)^p)$ si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ si $\theta = \frac{1}{2}$.

Déf 32 (stabilité) : Le schéma $\{u_j^n\}$ est dit stable en norme ℓ^2 (où $\|\{u_j^n\}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=0}^{N+1} \Delta x |u_j^n|^2\right)^{1/2}$ lorsqu'il existe $C>0$ tel que $\forall n \geq 0$, $\|u^n\|_{\ell^2} \leq C \|u^0\|_{\ell^2}$.

Ex 33 : Le θ-schéma est stable ℓ^2 sous la condition CFL :

$$2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

Thm 34 (Lax) : Un schéma consistant et stable est convergent au sens où $\forall T>0$, $\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \|u^n - u(t_n, \cdot)\|_{\ell^2} \right) = 0$.

IV. APPLICATION À LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE DES MESURES DE PROBABILITÉ

1- Définition.

Déf. 35. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, on définit sa fonction caractéristique : $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$, $t \in \mathbb{R}$.

Thm 36 La fonction caractéristique vérifie :

(i) Si $E(|X|^k) < \infty$ alors φ est k-fois différentiable et :

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} E(X^j)(it)^j + o(t^k) \text{ lorsque } t \to 0.$$

En particulier pour $n = 1, \dots, k$, $\varphi^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$.

(ii) La fonction caractéristique caractérise la loi.

2. Le théorème de Lévy.

Thm 37 (Prokhorov) Si (μ_n) est une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ tendue (i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n([-M, M]) > 1 - \varepsilon$) alors il existe une sous-suite $(n_k)_k$ et une mesure de probabilité μ telle que $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$.

Thm 38 (Lévy) Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ de fonctions caractéristiques $(\varphi_n)_n$. On suppose :

(a) $(\varphi_n)_n$ CVS vers φ (b) φ est continue en 0.

Alors $\exists \mu$ une mesure de probabilité μ telle que $\mu_n \Rightarrow \mu$ et φ est la fonction caractéristique de μ.

App 39 : Le théorème central limite.

3. Problèmes de moments

Thm 40 Soit $(\alpha_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \frac{\alpha_k}{k!} z^k$ a un rayon de CV > 0. Alors il existe au plus une mesure de proba dont les $(\alpha_k)_k$ sont les moments.

Ex. 41 : La loi normale est caractérisée par ses moments.

Thm 42 Soit X une var caractérisée par ses moments $(\alpha_k)_k$. Soit $(X_n)_n$ une suite de var admettant des moments de tous ordre $(\alpha_k^n)_k$, $\forall n \geq 0$. Si $\forall k \geq 0$, $\alpha_k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha_k$ alors $X_n \Rightarrow X$.

Leçon 219

Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

La partie optimisation sous contraintes d'inégalité me semble un peu difficile (elle est dans Ciarlet ou Allaire si vraiment). On peut aisément la remplacer par une partie optimisation dans un Hilbert et recycler les trucs sur les formulations variationnelles ou parler de principe du maximum dans le cadre de l'analyse complexe ou de certaines EDP comme la chaleur par exemple.

219 - Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

I - GÉNÉRALITÉS OUTILS

1 - Cadre et définitions

- On se place dans E un espace de Banach réel.
- On note $J : U \to \mathbb{R}$, $U \subset E$ non vide.

Déf : Soit $a \in U$. On dit que J admet :
* un minimum local (resp. global) en a lorsque $\exists$ voisinage V de a dans U (resp. $\forall x \in U$) tel que $\forall x \in V$, $J(a) \leq J(x)$. On parle de minimum strict lorsque l'inégalité est stricte.
* un maximum local/global (strict) en inversant le sens de l'inégalité
* un extremum lorsque $J(a)$ est un minimum ou un maximum.

Déf : Un problème de minimisation est dit sous contrainte lorsqu'on cherche $[x \in K, J(x) = \inf_K J]$ $K = V$ un evn et sous-contrainte si $K \neq V$.

2 - Compacité et optimisation

Prop : Si $J : K \to \mathbb{R}$ est continue et K compact alors K est bornée et atteint ses bornes.

Aff : équivalence des normes en dimension finie.

Déf : Si K est non borné, on dit que J est coercive lorsque $\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$

Prop : Une fonction semi-C° inf. coercive est minorée et atteint son minimum

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ coercive atteint son min en 0.

Aff : Théorème de d'Alembert-Gauss : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

3 - Fonctions convexes

Dans ce paragraphe, K est convexe fermé et $f : K \to \mathbb{R}$.

Déf :
- convexe
- strict-convexe
- α-convexe.

Proposition (caractérisation) -
- différentielle d'ordre 1
- différentielle d'ordre 2.

Théorème (extrema des fonctions convexes) Soit K convexe fermé en df et $J : K \to \mathbb{R}$ convexe en df.
(1) Si J admet un minimum local en un point alors il est global.
(2) Une fonction J strict-convexe admet au plus un minimum et il est strict
(3) Si J est α-convexe, alors J admet un minimum.

Théorème (existence d'un extremum en dim infinie) Si $J : K \to \mathbb{R}$ α-convexe continue, K convexe fermé, alors J atteint un min strict.
$K \subset H$ Hilbert

II - OPTIMISATION ET DIFFÉRENTIABILITÉ (OPTIMISATION SANS CONTRAINTE)

Dans cette partie U est ouvert.

1 - Ordre 1

Théorème (Équation d'Euler) Si $J : U \to \mathbb{R}$ admet un extremum en x et si J est différentiable en x alors $\nabla J(x) = 0$.

C-ex : La condition n'est pas suffisante $x \mapsto x^4$.

Prop : Si J est convexe c'est une équivalence et c'est un min.

Aff : théorème de Rolle.

Aff : théorème des accroissements finis.

2 - Ordre 2

Thm : Si $J : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x \in \Omega$ et si x est un minimum local alors $\forall h \in \Omega$, $\langle h, \nabla^2 J(x) h \rangle \geq 0$.

+ +. [Ciarlet] -

III - OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Cadre : $J : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\varphi_i : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$

$K = \{v \in \Omega,\ \varphi_i(v) = 0,\ 1 \le i \le m\}$.

1 - Directions admissibles - (Allaire)

Def Pour $v \in K$, $K(v) = \left\{ w \in V,\ \exists (v^n) \in K^{\mathbb{N}},\ \exists (\varepsilon^n) \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}} \right.$
$\left. \lim_{n \to +\infty} v^n = v,\ \lim_{n \to +\infty} \varepsilon^n = 0,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{v^n - v}{\varepsilon^n} = w \right\}$

Prop - (inéquation d'Euler) Soit u un min local de J sur K - Si J est différentiable en u, on a : $\langle \nabla J(u), w \rangle \ge 0 \quad \forall w \in K(u)$

Prop (cas convexe) - Si K, J convexe, min local $\Leftrightarrow \langle \nabla J(u), u - v \rangle \ge 0 \quad \forall v \in K$

2 - Théorème des extrema liés - (contraintes d'égalité).

Def On dit que les contraintes sont qualifiées en $u \in K$ lorsque $(\nabla \varphi_1(u), \dots, \nabla \varphi_m(u))$ est libre -

Théorème (extrema liés). Si les contraintes sont qualifiées en u et si J admet en u un extremum local et est différentiable en u, alors il existe, $\lambda_i(u) \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$ uniques tels que :

$$\nabla J(u) + \lambda_1(u) \nabla \varphi_1(u) + \dots + \lambda_m(u) \nabla \varphi_m(u) = 0.$$

Plein d'exemple dont le problème dans (Allaire)

IV - OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES D'INÉGALITÉ

1 - Définitions

$K = \{v \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_i(v) \le 0,\ 1 \le i \le m\}$ -

Def : Contraintes actives en $u \in K$, $I(u) = \{i \in \{1, \dots, m\},\ \varphi_i(u) = 0\}$

Def : Contraintes qualifiées en $u \in K$ lorsqu'il existe $v \in \mathbb{R}^d$ tq ou bien $\langle \nabla \varphi_i(u), v \rangle < 0$ ou bien $\langle \nabla \varphi_i(u), v \rangle = 0$ et $\nabla \varphi_i$ affine

Prop : Si les contraintes sont qualifiées en x alors

$K(x) = \{ h \in \mathbb{R}^d,\ \forall i \in I(x),\ \langle \nabla \varphi_i(u), h \rangle \le 0 \}$ -

2 - Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker -

Lemme (Farkas) Soit a_i, $i \in I$ fini, b des éléments d'un Hilbert V

L'inclusion $\{w \in V,\ \langle a_i, w \rangle \ge 0\ i \in I\} \subset \{w \in V,\ \langle b, w \rangle \ge 0\}$

est satisfaite ssi $\exists \lambda_i \ge 0$ tq $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$

Théorème (Karush-Kuhn-Tucker) - On suppose $J : \Omega \to \mathbb{R}$ dérivable en $u \in K$ Si J admet en u un min local et si les contraintes sont qualifiées au point u, alors il existe des nombres $\lambda_i(u)$, $i \in I(u)$ tq $\nabla J(u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i(u) \nabla \varphi_i(u) = 0$ et $\lambda_i(u) \ge 0$, $i \in I(u)$.

Exemple. Thibaut.

Thm (Kuhn-Tucker convexe). On suppose que les contraintes φ_i sont convexes, ce qui fait de U une partie convexe.

(1) Si J admet en u un min local et si les contraintes sont qualifiées en u, alors il existe des nombres $\lambda_i(u)$ tq :
$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u) \nabla \varphi_i(u) = 0$, $\lambda_i(u) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u) \varphi_i(u) = 0$.

(2) Si $J : U \to \mathbb{R}$ est convexe et s'il existe des nombres λ_i comme en (1) alors J admet en u un min local.

IV - ALGORITHMES D'OPTIMISATION.

1. Méthode de Newton. [Allaire].

Idée : Recherche des zéros de $\nabla J : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

2. Méthodes de descente [Ciarlet] (voir leçon 253).

Leçon 220

Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

C'est vraiment pas facile de faire un truc propre. J'ai trouvé pratique de mettre les trucs techniques sur l'autonomisation, les paramètres, Gronwall et tout dans une partie introductive, comme ça on ne s'occupe plus que de systèmes autonomes sans paramètre.

La première partie sur les théorèmes d'existence et d'unicité est peut être la plus difficile. Il y a pleiiiiiiin d'énoncés et de preuves différentes, en particulier j'ai listé :

Existence en dimension finie (Cauchy-Peano).

- Analyse *soft* : à partir du théorème de point fixe de Schauder, par exemple dans le livre de Hale.
- Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (!) dans Gonnord, Tosel.
- Analyse *hard* : à partir du concept d'ε-solution et en écrivant un schéma numérique, par exemple dans le livre de Coddington et Levinson.

Existence et unicité

- En dimension finie, analyse *hard* à la suite de Cauchy-Peano dans Coddington et Levinson (Gronwall et des estimations moches).
- Analyse *soft* dans un espace de Banach : le théorème de Cauchy-Lipschitz le plus simple à retenir à partir du théorème de point fixe, par exemple dans Gonnord, Tosel ou dans Avez.
- Dans le cas C^1 en dimension finie à partir du théorème des fonctions implicites : intéressant parce qu'on prouve de la régularité en même temps et pour le même prix mais la preuve est un peu subtile, par exemple dans Chicone ou dans Avez.

Pour ce qui concerne la régularité du flot et son équation variationnelle, il y a des choses dans le Gonnord-Tosel mais je préfère Avez. Le théorème de transport qui vient juste après est dans Betounes.

Le seul énoncé propre que j'ai trouvé de la résolution ≪ à la physicienne ≫des équations différentielles à variables séparables est dans Betounes, c'est moche mais planplan.

Enfin, j'aurais aimé parler des théorèmes Flow-Box et Grobman-Hartman (Betounes, Chicone) ainsi que du théorème de Poincaré-Bendixson (Gonnord-Tosel) mais c'est difficile.

220. Équations différentielles $X' = f(t,X)$ - Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2

I. PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES

1- Définitions.

Cadre : $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ où I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. C^0

Définition. Soient $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On appelle solution du problème de Cauchy

$(*)$ $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ un couple (J, x) où $J \subset I$ intervalle non trivial, $t_0 \in J$ et $x : J \to \mathbb{R}^d$ C^1 et vérifie $(*)$.

Prop : (J,x) solution du pb de Cauchy $(*) \iff \forall t \in J,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$.

Déf : Une solution maximale du pb de Cauchy $(*)$ une solution (J,x) maximale pour l'ordre $(J_1, x_1) \leq (J_2, x_2) \iff J_1 \subset J_2$ et $x_2|_{J_1} = x_1$. Elle est globale si $J = I$. On note Λ l'ens. des solutions à $(*)$.

Lemme (Gronwall). Soient u, v deux applications continues sur $[t_0, t_0+T]$ dans $\mathbb{R}_+$ et $C > 0$ tq $\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} uv$. Alors $\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $u(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} v}$

2- Réduction au premier ordre. Autonomisation.

- Un système $x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ peut être réduit en un système d'ordre 1 en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix}$.

Exemple :

Déf : Le pb de Cauchy est dit autonome lorsque f est indépendant de t.

- Un système $x' = f(t,x)$ peut être réduit en un système autonome en posant $\begin{cases} x_0' = 1 \\ x' = f(x_0, x) \end{cases}$ $\quad F(x_0|x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x_0|x) \end{pmatrix}$

II. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1. Existence et unicité

Théorème (Cauchy-Peano) Soient $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et $r > 0$ tq $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Quitte à réduire I, on suppose que $|f|$ est bornée par $M > 0$ sur $I \times \overline{B}(x_0, r)$. On pose $J = I \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$. Alors il existe une solution $x : J \to \overline{B}(x_0, r)$ au problème $(*)$.

Contre-ex : Pas unicité : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \end{cases}$

Contre-ex : Faux en dimension infinie : $\begin{cases} u_n(0) = 0 \\ u_n'(t) = \sqrt{|u_n(t)|} + \frac{1}{n+1} \end{cases}$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz). Soient $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, $r, M, C > 0$ tels que :
(i) $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$ (ii) f est bornée par M sur $I \times \overline{B}(x_0, r)$
(iii) f est C-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times \overline{B}(x_0, r)$
Soit $J = I \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$. Alors il existe une unique solution $x : J \to \overline{B}(x_0, r)$ au problème $(*)$.

Corollaire : Soient (J_1, x_1), (J_2, x_2) dans Λ s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tq $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ alors $x_1|_{J_1 \cap J_2} = x_2|_{J_1 \cap J_2}$.

Théorème (sol. max). Il existe une unique solution maximale au pb de Cauchy $(*)$. Elle est définie sur un intervalle ouvert de I.

2. Majoration a priori. Théorème de Sortie de tout compact

Théorème : Soit $(J,x) \in \Lambda$. Soit $\beta = \sup J$. Si $\beta < \sup I$ et s'il existe un compact $K \subset \Omega$ et une suite (t_n) tq $t_n \to \beta$ et $x(t_n) \in K$ $\forall n$. Alors (J,x) peut être prolongée au delà de β.

Corollaire : Soit $(J,x) \in \Lambda$ tq $\sup J < \sup I$. Soit K compact de Ω. Il existe $T < \sup J$ tel que $t > T \Rightarrow x(t) \notin K$.

Application : Si $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq C|x| + A$ alors les solutions sont globales.

3. Dépendance continue

Théorème. Soient (J, x) et (K, y) les solutions maximales de $(*)$ relativement aux CI (t_0, x_0) et (t_0, y_0).

Théorème (Cauchy-Lipschitz paramètre)

Application : Hadamard-Lévy.

4. Le flot d'une EDO.

Déf Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on définit $\phi_t^{t_0}(x_0)$ le flot de l'EDO, c'est à dire la solution en t, $x(t)$ de $x'(t) = F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$.

Théorème. Sous réserve d'existence, $\phi_v^t\left(\phi_t^s(x)\right) = \phi_v^s(x)$

Rem : Dans le cas d'un système autonome, on peut supposer sans perte de généralité $t_0 = t$ et on notera $\phi_t(x) = \phi_t^0(x)$.
Alors $\phi_s\left(\phi_t(x)\right) = \phi_{s+t}(x)$.

Prop (équation variationnelle du flot). La jacobienne $\phi_t'(x)$ vérifie :
$$\frac{d}{dt}\left(\det \phi_t'(x)\right) = \operatorname{div} F\left(t, \phi_t(x)\right) \det\left(\phi_t'(x)\right)$$

Application (théorème de Transport). Soit $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, I intervalle et $I \times \Omega$ contenu dans le domaine du flot. Alors :
$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\Omega)} f(x)\,dx = \int_{\phi_t(\Omega)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + F \cdot \nabla f + (\operatorname{div} F) f \right\} dx$$
Si $\operatorname{div} F = 0$, $\lambda(\phi_t(\Omega)) = \lambda(\Omega)$.

III - ÉQUATIONS PARTICULIÈRES - TECHNIQUES DE RÉSOLUTION.

1. Équations linéaires

Cadre : Équations de la forme $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ et $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ où $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^d$ continues sur l'intervalle I.

Théorème. Il existe une unique solution, elle est globalement définie sur I.

Déf/Prop. Il existe une unique application $t \mapsto R(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dérivable dans I telle que $\begin{cases} R'(t) = A(t)R(t), \ \forall t \in I \\ R(0) = I_d \end{cases}$ - c'est la résolvante du système -

Prop : $R(t)$ est inversible pour tout t et $\det R(t) = \exp \int_0^t \operatorname{Tr} A(s)\,ds$.

Théorème. L'unique solution du système inhomogène est :
$$x(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1} b(s)\,ds.$$

Rem : Si A est indépendante de t, $R(t) = e^{tA}$.

Exemple :

2. En dimension 1

Exemple : Esquisse du portrait de phase et des solutions de $x' = x(1-x)$

Cadre : Système autonome $x' = F(x)$ où F C^1 avec un nombre fini de zéros sur I.

Prop : Soient $c_1, \dots, c_p$ les zéros de F et $m_j \in]c_{j-1}, c_j[$. Pour $x \in K_j$ soit $H(x) = \int_{m_j}^x \frac{du}{F(u)}$. H est strictement monotone. Soit $x_0 \in K_j$ et $H_0(x) = H(x) - H(x_0)$. H_0 est inversible d'inverse définie sur $]a_j - H(x_0), b_j - H(x_0)[$ où $a_j = \inf\{H(x), x \in K_j\}$, $b_j = \sup\{H(x), x \in K_j\}$
$x_0(t) = H_0^{-1}(t) : J_0 \to \mathbb{R}$ est la sol max de $\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

Ex : Les solutions de $x' = x(1-x)$ sont de la forme $x(t) = \frac{x_0 e^t}{1 - x_0 + x_0 e^t}$ (dessin)

Ex : Les solutions de $x'(t) = \frac{1-2t}{\cos(x)}$ pour $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vérifient :

$\sin(x(t)) = t - t^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

3- Intégrales premières (en dimension 1 et 2)

Déf : Une intégrale première du système autonome $x' = X(x)$ est une fonction $F(t,x)$ définie sur U telle que $\nabla F \cdot \tilde{X} = 0$ sur $U \subset \mathbb{R}^2$ où $\tilde{X}(t,x) = (1, X(t,x))$

Prop : $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est une courbe intégrale de $x' = X(t,x)$ ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $F(t, \alpha(t)) = k$ pour tout $t \in I$.

App (Lotka-Volterra) : A, B, C, D, $\begin{cases} x'(t) = Ax - Bxy \\ y'(t) = Cxy - Dy \end{cases}$. Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, il existe une unique solution maximale $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ pour tout temps.

$H(x,y) = Cx - D\ln x + By - A\ln y$ est une intégrale première.

Les lignes de niveau de H sont bornées : les solutions sont globales (en fait périodique).

App (Van der Pol) : Soit (x,y) une solution locale du système $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) + \varepsilon(x^2 - 1)y \end{cases}$ (VDP)

En considérant $E(t) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ on montre que les solutions sont globales.

IV- STABILITÉ. LINÉARISATION.

Cadre : $x'(t) = f(x(t))$, $x_0 \in \Omega$, $f \in C^1 \Omega \to \mathbb{R}^d$

1. Point critique et stabilité

Déf : On dit que $x_0 \in \Omega$ est un point critique (équilibre) de f lorsque $f(x_0) = 0$.

Déf : L'équilibre x_0 est dit stable lorsque pour tout voisinage V de x_0 dans Ω, $\exists$ un voisinage U de x_0 dans Ω tq $\forall x \in U$, $\phi_t(x)$ défini $\forall t \geq 0$ et $\phi_t(x) \in V$ $\forall t$. Il est dit instable sinon. Il est dit asymptotiquement stable lorsqu'il est stable et pour x dans un voisinage de x_0, $\phi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_0$.

Déf : On appelle fonction de Lyapunov toute fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 tq $\forall x \in \Omega$, $dV(x) f(x) \leq 0$.

Thm (Lyapunov) : Si V admet en x_0 un min local strict alors x_0 est un équilibre stable. Si de plus $\forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}$, $dV(x) f(x) < 0$ alors x_0 est asymptotiquement stable.

Thm (Cebaev) : On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ et une fonction $\tilde{V} : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 avec (i) $\forall x \in U$, $\tilde{V}(x) > 0$ (ii) $\forall x \in U$, $dV(x) f(x) > 0$ (iii) $\forall x \in \partial U$, $V(x) = 0$ (iv) $x_0 \in \partial U$

Alors l'équilibre x_0 est instable.

Rem : si $f(x_0) \neq 0$ alors, au voisinage de x_0, le système est "topologiquement équivalent" à un système simple (flow-box)

2. Linéarisation et stabilité

Déf (linéarisé) : On appelle linéarisé au voisinage de $x_0 \in \Omega$ le système linéaire $x'(t) = df(x_0) x(t)$

Thm (stabilité) : Si $df(x_0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable

Thm (instabilité) : Si $df(x_0)$ a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors x_0 est un équilibre instable.

Ex.

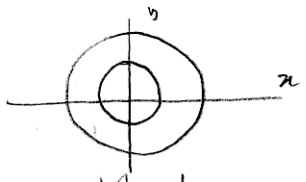
Rem : Le théorème de Grobman-Hartman précise d'un point de vue topologique le comportement au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique (i.e. les vap de $df(x_0)$ sont imaginaires pures). C'est difficile.

3. Un exemple de perturbation non-linéaire d'un système linéaire

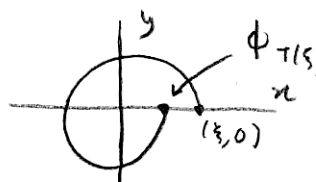
On note $\phi_t(\xi; \varepsilon)$ le flot du système de Van der Pol associé à la condition initiale $(\xi, 0)$ où $\xi > 0$.

Prop : Pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une fonction $T : (\xi; \varepsilon) \mapsto T(\xi; \varepsilon)$ C^1 telle que $\phi_{T(\xi;\varepsilon)}(\xi; \varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, $T(\xi, 0) = 2\pi$ et $\phi_{T(\xi,0)}(\xi; 0) = (\xi, 0)$

Thm : Il existe une fonction $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ définie dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ telle que $\beta(0) = 2$ et pour tout $\varepsilon > 0$ dans le domaine de définition de β, le système (VDP) a une orbite périodique avec condition initiale $(\beta(\varepsilon), 0)$



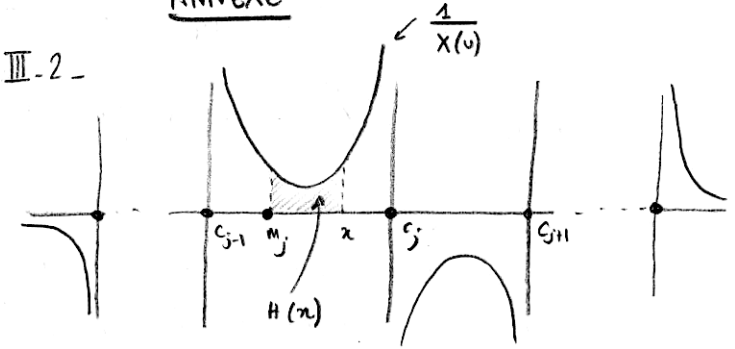
orbites du système linéaire

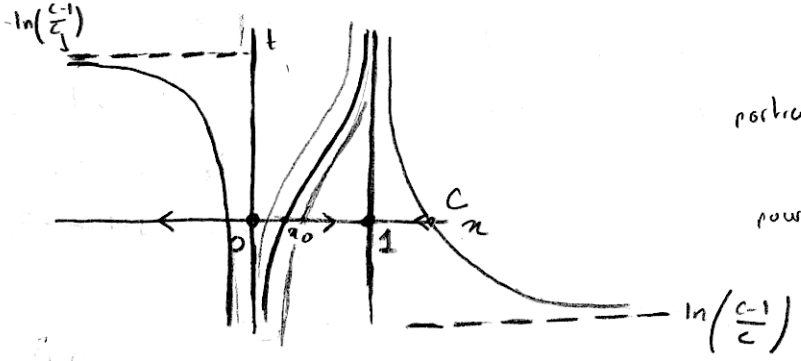


orbite du système perturbé (VDP)

ANNEXE

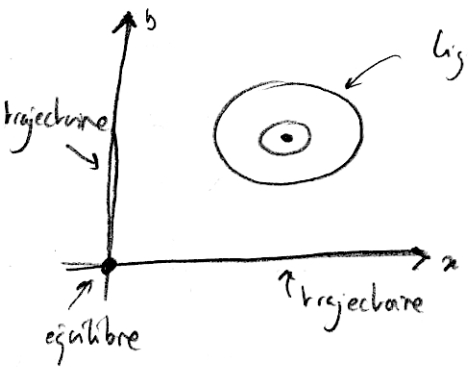
III-2-





portrait de phase et trajectoires pour $x' = x(1-x)$.

Lotka-Volterra



Leçon 221

Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le *Calcul Différentiel* de S. Gonnord et N. Tosel contient plein d'exemples intéressants et d'applications qui font des parties entières du plan. Les dessins des portraits de phase en dimension 2 sont dans le livre de Coddington et Levinson.

221 Équations différentielles linéaires - Systèmes d'équations différentielles linéaires - Exemples et applications -

I - RÉSULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continues.

1 - Théorèmes d'existence et d'unicité.

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire). Pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy (C) $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Rem : Toute équation différentielle d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ linéaire $x^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)x^{(p-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b(t)$ se réécrit sous la forme précédente en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

C-ex (existence globale). L'équation non-linéaire $\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution qui n'est pas globale.

C-ex (unicité)

[GT2] Thm d'unicité pour des problèmes pas de Cauchy.

2 - Structure de l'espace des solutions -

Lemme (Gronwall). Soient u et $v : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}_+$ continues et $C > 0$ tels que $\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $u(t) \leq C + \int_{t_0}^t uv$. Alors $\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $u(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t v$.

Prop (principe de superposition). On considère le système homogène (H) $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$
Si x_1 et x_2 sont deux solutions de (H) définies sur I et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est aussi solution de (H) sur I. En conséquence l'ensemble des solutions de (H) forme un espace vectoriel dont on montre qu'il est de dimension n.

Déf/Prop. On appelle résolvante de (H) l'unique application $R : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\begin{cases} R'(t) = A(t)R(t) \\ R(t_0) = I_n \end{cases}$. Une solution de (H) s'écrit $t \mapsto R(t)x_0$.

Prop (Liouville). Pour tout $t \in I$, $\det R(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{Tr} A(s)\, ds\right)$.

Corollaire. $\forall t \in I$, $R(t) \in GL_n(\mathbb{K})$

App.

Théorème (Duhamel). Si R désigne la résolvante de (H) alors l'unique solution de (C) est $x(t) = R(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^t R(s)^{-1} b(s)\, ds\right]$.

Ex.

II - RÉSOLUTION EXPLICITE ET ASPECTS QUALITATIFS

1 - Le cas des coefficients constants

Cadre : Ici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est constante -

Prop : La résolvante de (H) est $t \mapsto e^{tA}$ est la formule de Duhamel se réécrit : $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds$ -

Aff : Il y a équivalence entre (i) Pour tout $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^n$ borné, il existe une unique solution à (c) bornée (ii) $Sp A \subset \{z \in \mathbb{C}, \Re z > 0\}$

Thm. Les solution de (H) sont de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i(t)$ où les $\lambda_i, 1 \le i \le p$ sont les valeurs propres distinctes de A sur $\mathbb{C}$, et $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\le m_i$ m_i étant la multiplicité algébrique de λ_i.

2. Méthodes explicites : variation de la constante, séries entières -

Principe (variation de la constante) - Si on sait résoudre (H), alors la résolution de (c) revient à une quadrature.

Ex (dimension 1)

Ex (dimension 2)

[RDO p. 211]

Principe (série entière). On résout une équation différentielle linéaire d'ordre p en cherchant une solution sous forme de série entière.

Ex -

3. Considérations sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Fait : Le changement de variable $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)\,ds\right) y(t)$ permet de ramener l'étude de $x''(t) + c(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ à celle de $y'' + q(t)y = 0$ (2)

Prop. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (2), leur wronskien $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ est constant.

Théorème (Sturm). Soient $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ C^0 avec $q_1 \le q_2$. Soient y_1 solution de (2) avec q_1 et α, β deux zéros consécutifs de y_1. Soit y_2 solution de (2) avec q_2. Alors y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

Corollaire. Si $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifie $q(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$ alors le nombre de zéros d'une solution y de (2) entre $[0,t]$, noté $N(t)$, vérifie $N(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}$.

4- Considérations dans le cas où les coefficients sont périodiques -

Cadre : $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est T-périodique - C^0

Théorème (Floquet) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t+T) = R(t)R(T)$ et $t \mapsto R(t)x_0$ est T-périodique ssi $x_0 \in Ker(R(T) - I_n)$. De plus, $\exists F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ C^1 T-périodique de sorte que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) = S(t)e^{tF}$

Aff : bof.

Thm (Sturm périodique). Si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique alors on a l'alternative
(i) Pour toute solution de (2) l'ensemble des zéros sur $\mathbb{R}$ est au plus un singleton
(ii) Pour toute solution de (2), l'ensemble des zéros sur $\mathbb{R}$ est infini.

5. Étude qualitative dans le cas des coefficients constants en dimension 2

Cadre : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constante.

III - LINÉARISATION - PERTURBATIONS -

1- Stabilité dans le cas général

Thm (Lyapunov) : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ localement lipschitzien dont $x_0 \in \Omega$ est un équilibre. On suppose qu'il existe une fonction $V : U \subset \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 telle que :
(i) $V(x_0) = 0$ (ii) $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, $V(x) > 0$ (iii) $\forall x \in U$, $dV(x) f(x) \leq 0$.
Alors x_0 est un équilibre stable et si $dV(x) f(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ alors x_0 est asymptotiquement stable.

Thm (Cebaev) Mêmes hypothèses avec V vérifiant :
(i) $\forall x \in U$, $V(x) > 0$ (ii) $\forall x \in U$, $dV(x) f(x) > 0$ (iii) $\forall x \in \partial U$, $V(x) = 0$ (iv) $x_0 \in \partial U$
Alors l'équilibre x_0 est instable.

2- Stabilité et perturbation d'un système linéaire - Linéarisation -

Cadre : On considère le système non-linéaire (S) $\begin{cases} x'(t) = A(t)x + g(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
avec $\|g(t,x)\| \underset{x \to 0}{=} o(\|x\|)$. Soit x_0 un équilibre. $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Thm (stabilité) Si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable.

Aff : Linéarisation d'un système non-linéaire au voisinage d'un équilibre.

Thm (instabilité) Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors x_0 est un équilibre instable.

Ex :

3. Un exemple de perturbation d'un système linéaire périodique -

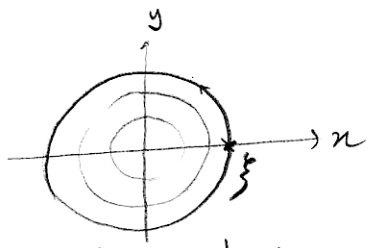
Cadre : Pour $\varepsilon > 0$, l'équation du pendule de van der Pol est : $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$

On le réécrit $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - \varepsilon(x^2-1)y \end{cases}$ i.e. $X' = AX + \varepsilon f(X)$ (VDP)
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ (x^2-1)y \end{pmatrix}$

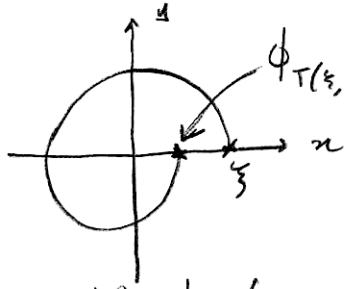
Notation : $\phi_t(\xi;\varepsilon)$ le flot de (VDP) avec la condition initiale $x(0;\varepsilon) = \xi > 0$ et $y(0;\varepsilon) = 0$ soit $\xi > 0$

Prop. Pour $\varepsilon > 0$ petit, $\exists$ une fonction C^1 $(\xi;\varepsilon) \mapsto T(\xi;\varepsilon)$ telle que :
$\phi_{T(\xi;\varepsilon)}(\xi;\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, $T(\xi;0) = 2\pi$ et $\phi_{T(\xi;0)}(\xi;0) = (\xi, 0)$.

Thm : Il existe une fonction $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ définie au voisinage de $\varepsilon = 0$ telle que $\beta(0) = 2$ et pour tout $\varepsilon > 0$ dans le domaine de définition de β, (VDP) a une orbite périodique avec condition initiale $(\beta(\varepsilon), 0)$.



orbites périodiques système linéaire



orbite dans le cas non périodique -

Leçon 222

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Je crois qu'on peut faire une belle leçon uniquement en reprenant les éléments les plus saillants d'autres leçons, notamment 213, 250 et 246.

On peut faire un plan avec une partie par équation mais j'ai préféré faire un plan avec une partie = une technique de résolution et une équation associée. Déjà parce que ça économise du travail vu que la plupart des trucs ont déjà été faits dans les autres leçons et en plus je ne crois pas qu'il s'agisse de faire un travail encyclopédique comme le fait Evans où on liste toutes les propriétés de toutes les équations du monde...

La première partie est sans doute tirée de l'introduction du livre de G. Allaire. Je m'interroge néanmoins sur le concept de problème bien posé à l'agrégation, mais bon, il me semble que c'est important. Le théorème de Cauchy-Kowalevski et le contre-exemple de Lewy sont largement culturels et méritent d'être admis (mais je ne crois pas que la preuve soit si délirante). On trouvera le détail dans le livre de John, *Partial Differential Equations* (la dernière édition).

La partie sur les équations de transport et la méthode des caractéristiques se trouve dans le livre de B. Perthame, *Transport Equations in Biology*. Le cours de F. Castella est sinon exceptionnel.

Tout ce qui concerne les séries de Fourier est dans le *Calcul Intégral* de Candelpergher et pour la transformée de Fourier et ses applications aux EDP linéaires, on pourra consulter le livre de J. Rauch, *Partial Differential Equations*.

Il me semble bien suffisant de traiter les problèmes elliptiques en dimension 1 : c'est bien plus confortable puisque tout est continu et on n'a pas besoin de jouer avec la formule de Stokes ou de la géométrie différentielle. J'ai recopié le livre de Brézis.

Pour les schémas numériques c'est un peu délicat, je ne connais pas de référence ultime en dehors du cours de F. Castella. On peut sûrement trouver son bonheur dans le livre de G. Allaire ou celui de Quarteroni, Sacco, Saleri.

Il y a plus dans le développement sur l'équation de Schrödinger, lequel s'insère parfaitement dans au moins la moitié des leçons d'analyse (c'est pour ça qu'on fait de l'analyse après tout...).

Généralités sur les EDP linéaires

Notion de problème bien posé

Définition. Une Équation aux Dérivées Partielles sur $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est une relation du type $F(x_1, \ldots, x_d, \partial^\alpha u, \ldots) = 0$ d'inconnue $u : \Omega \to \mathbf{C}$. On dit que l'équation est linéaire lorsque F est linéaire relativement aux termes dépendants de u.

Définition. On appelle *problème de Cauchy* une EDP assortie d'une condition en $t = 0$.

Définition. On appelle *problème aux limites* une EDP assortie d'une condition sur $\partial\Omega$.

Définition. On dit qu'un problème est *bien posé* au sens de Hadamard si pour toute donnée, le problème admet une unique solution qui dépend continûment de cette donnée.

Exemples d'EDP linéaires de référence

Définition. Une EDP linéaire d'ordre 2 :

$$a\partial^2_{xx}u + b\partial^2_{xy}u + c\partial^2_{yy}u + d\partial_x u + e\partial_y u + fu + g = 0$$

est dite :

- **elliptique** lorsque $b^2 - 4ac < 0$. C'est le cas de :

$$\text{(Dirichlet)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \ \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- **parabolique** lorsque $b^2 - 4ac = 0$. C'est le cas de :

$$\text{(Chaleur)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u & = & f \ \text{ dans } \mathbf{R}_+^* \times \Omega \\ u(t=0,\cdot) & = & u_0 \ \text{ dans } \Omega \end{array} \right.$$

- **hyperbolique** lorsque $b^2 - 4ac > 0$. C'est le cas de

$$\text{(Ondes)} \quad \partial^2_{tt}u = c^2\partial^2_{xx}u.$$

L'équation de transport :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + b(t,x)\cdot\nabla_x u & = & 0 \ \text{ dans } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^d \\ u(t=0,\cdot) & = & u_0 \ \text{ dans } \mathbf{R}^d \end{array} \right.$$

est dite hyperbolique.

L'équation de Schrödinger :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \Delta u & = & 0 \ \text{ dans } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^d \\ u(t=0,\cdot) & = & u_0 \ \text{ dans } \mathbf{R}^d \end{array} \right.$$

n'entre pas dans cette classification.

Absence de théorie générale

Théorème (Cauchy-Kowalevski)**.** *Un problème de Cauchy avec des données analytiques admet une unique solution locale qui est analytique.*

Contre-exemple. L'équation de Lewy $\partial_x u + \partial_y u - 2i(x+iy)\partial_t u = F$ n'admet aucune solution C^1 sur aucun ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ et ce pour beaucoup de fonctions F de classe C^∞.

Méthode des caractéristiques pour les problèmes de transport

Principe

On considère l'équation de transport en supposant que $b(t,x)$ est C^1 et globalement lipschitzienne sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$.

Définition. On appelle *courbe caractéristique* toute solution d'un problème différentiel du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X}(t,y) & = & b(t,X(t,y))\\ X(0,y) & = & y\in\mathbf{R}^d\end{array}\right.$$

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $u_0\in C^1(\mathbf{R}^d)$, l'équation de transport admet une unique solution $u\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$, laquelle vérifie :*

$$\forall t\in\mathbf{R},\ \forall y\in\mathbf{R}^d,\ \ u\big(t,X(t,y)\big)=u_0(y).$$

En particulier si $d=1$ et $b(t,x)=c\in\mathbf{R}$, on a $u(t,x)=u_0(x-ct)$.

La solution u a la même régularité que u^0 et vérifie le principe du maximum :

$$\forall t\in\mathbf{R},\ \forall x\in\mathbf{R}^d,\ \ \inf_{y\in\mathbf{R}^d}u^0(y)\le u(t,x)\le\sup_{y\in\mathbf{R}^d}u^0(y).$$

On peut résoudre par variation de la constante le problème inhomogène. En particulier en écrivant :

$$\partial_{tt}^2-c^2\partial_{xx}^2=(\partial_t+c\partial_x)(\partial_t-c\partial_x)$$

on peut résoudre l'équation des ondes avec conditions de Cauchy.

Notion de solution faible

Définition. On appelle solution faible de l'équation de transport toute fonction $u\in C\big(\mathbf{R}_+;L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^d)\big)$ satisfaisant :

$$-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^d}u(t,x)\Big[\partial_t\varphi(t,x)+\mathrm{div}_x\big(b\cdot\varphi\big)(t,x)\Big]dxdt=\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(t=0,x)u_0(x)dx$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$.

Proposition. *Si $u\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$ alors u est solution faible si et seulement si u est solution forte.*

Théorème. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment et si $u_0\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ alors il existe une unique solution faible à l'équation de transport. Elle est constante le long des caractéristiques et vérifie le principe du maximum.*

L'analyse de Fourier à la rescousse

Cadre : Équations linéaires à coefficients constants.

L'équation de la chaleur dans un cercle

On considère le problème en dimension 1, périodique et régulier :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t u(t,x) & = & \partial^2_{xx}u(t,x),\ \ x\in[0,1],\ t>0\\ u(0,x) & = & u_0(x)\in C^2(\mathbf{R}),\ \ 1-\text{périodique}\end{array}\right.$$

Idée : Décomposer une éventuelle solution en série de Fourier et trouver une équation différentielle satisfaite par les coefficients de Fourier.

Théorème. *Le problème admet une unique solution qui s'écrit :*

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in [0,1],\ \ u(t,x) = K_t * u_0(x) \ \ \text{où}\ \ K_t(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi nx}.$$

En particulier, $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{T})$.

Le problème de Dirichlet dans un disque

Définition. Une série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ est dite *Abel-sommable* lorsqu'existe la limite :

$$\sum_{\text{Abel}} u_n := \lim_{r\to 1} \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|} u_n.$$

Théorème. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 1-périodique et intégrable sur $]0,1[$. En tout point x où f est continue :*

$$\sum_{Abel} c_n(f) e^{2i\pi nx} = \lim_{r\to 1} \big(P_r * f\big)(x)$$

où $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|} e^{2i\pi nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi x)+r^2}$. Si f est continue sur $\mathbf{R}$ la convergence est uniforme.

Proposition. *Il y a une bijection :*

(i) Si $\tilde f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est analytique dans $\mathbf{D}(0,1)$ et se prolonge continûment sur le cercle alors $f(x) := \tilde f(e^{2i\pi x})$ est 1-périodique, continue et ses coefficients de Fourier d'indice < 0 sont tous nuls. De plus $f(x) = \sum_{Abel} a_n e^{2i\pi nx}$.

(ii) Si f est continue sur $\mathcal{C}(0,1)$ avec $c_{-n}(f) = 0$ pour $n \geq 1$ alors $f(x) = \lim_{r\to 1} \tilde f(re^{2i\pi x})$ où $\tilde f = \sum_{n\geq 0} c_n(f) z^n$ est analytique dans $\mathbf{D}(0,1)$.

Théorème. *Si v est à valeurs réelles, le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \ \ \text{dans}\ \mathbf{D}(0,1) \\ u &= v \ \ \text{sur}\ \mathcal{C}(0,1) \end{cases}$$

a une unique solution donnée par :

$$u(re^{2i\pi x}) = \operatorname{Re} \tilde f(re^{2i\pi x}) = \int_0^1 v(e^{2i\pi y}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(x-y))+r^2} dy$$

où $\tilde f$ est associée à f telle que que $\operatorname{Re} f(x) = v(e^{2i\pi x})$ et $c_{-n}(f) = 0$ pour $n \geq 1$ (existe en tronquant le développement en série de Fourier de $v(e^{2i\pi x})$).

Le cas non périodique et la transformée de Fourier

Théorème. $\mathscr{F}(\partial^\alpha u)(\xi) = (-2i\pi\xi)^\alpha \hat u(\xi)$.

Théorème. *Si $u \in C^1(\mathbf{R}; \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$ alors $\partial_t \mathscr{F} u = \mathscr{F} \partial_t u$.*

Principe : Résoudre l'EDP dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ en prenant la transformée de Fourier. Dériver des estimations d'énergie (*i.e* le problème est bien posé). Étendre la solution à des cas faibles.

Contre-exemple. En dehors du cadre fonctionnel $C^1(\mathbf{R}; \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$ rien n'est assuré, pas même l'unicité : $v(t,x) = \frac{x}{t^{3/2}} e^{-x^2/(4t)}$ si $t > 0$ et $v(0,x) = 0$ est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale nulle mais elle n'est même pas continue !

Exemple. Pour $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^d)$, l'équation de Schrödinger est bien posée dans $C(\mathbf{R}; H^s(\mathbf{R}^d)) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ **[Développement]**.

Méthodes variationnelles et hilbertiennes pour les problèmes elliptiques (dimension 1)

Espaces de Sobolev et trace

Définition. L'espace $H^1(0,1) = \{u \in L^2(0,1),\ u' \in L^2(0,1)\}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v'.$$

Proposition. *Si $u \in H^1(0,1)$ alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour presque tout $x \in [0,1]$:*

$$u(x) = \alpha + \int_0^x u'(t)dt.$$

En conséquence, $H^1(0,1)$ s'injecte continûment dans $C^0([0,1])$.

Définition. On définit $H^1_0(0,1) = \{u \in H^1(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}$: c'est la fermeture de $C^1_c(0,1)$ dans $H^1(0,1)$. L'espace $\mathcal{D}(0,1)$ est dense dans $H^1(0,1)$.

Théorème (Poincaré)**.** *Soit $u \in H^1_0(0,1)$, alors $\|u\|_{L^2} \leq c\|u'\|_{L^2}$.*

Formulation variationnelle

On appelle solution faible du problème $-u'' = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$ toute solution $u \in H^1_0(0,1)$ de la formulation variationnelle :

$$\forall v \in H^1_0(0,1),\ \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv =: a(u,f) = \ell(v).$$

Théorème. *Le théorème de Riesz donne une unique solution faible au problème. Si celle-ci est C^2 alors c'est une solution forte.*

Le problème de Sturm-Liouville

On considère le problème :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu &= f \ \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$$

et on pose :

$$a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv \ \text{ et } \ \ell(v) \int_0^1 fv.$$

Théorème (Lax-Milgram)**.** *Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive. Alors pour toute forme linéaire continue ℓ sur H, il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $a(y,x) = \ell(x)$. De plus si a est symétrique, y est l'unique minimiseur de $J(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - \ell(x)$.*

Théorème. *Si $p \in C^1(0,1)$, $q \in C(0,1)$ avec $p(x) \geq \alpha > 0$ et $q \geq 0$ alors la formulation variationnelle du problème de Sturm-Liouville admet une unique solution qui est une solution forte dès lors qu'elle est suffisamment régulière (voir régularité elliptique).*

Schémas numériques aux différences finies

Théorie

On considère un problème de Cauchy posé sur $(0,1)$ avec condition initiale u_0. On note $\Delta t > 0$, $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$. On va construire une suite $(u^n_j)_{n,j}$ où u^n_j est une approximation de la vraie solution $u(t_n, x_j)$.

Définition. Un schéma (linéaire) est une relation de récurrence du type :

$$u_j^{n+1} = u_j + \Delta t \phi(\Delta t, \Delta x, u^n)$$

où ϕ est linéaire.

Définition. Le schéma est dit *consistant* à l'ordre p en espace et q en temps lorsque pour toute solution **exacte** de l'équation :

$$\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} - \phi(\Delta t, \Delta x, \{u(t_n, x_k)\}_k) = \mathcal{O}\big((\Delta t)^q + (\Delta x)^p\big).$$

Définition. Le schéma est dit *stable* en norme $\|\cdot\|$ (norme sur les suites) lorsque :

$$\forall T = K\Delta t,\ \exists C_T > 0,\quad \sup_{n=0,\dots,K} \|u^n\| \leq C_T \|u^0\|.$$

Théorème (Lax)**.** *Un schéma consistant $\mathcal{O}\big((\Delta t)^q + (\Delta x)^p\big)$ et stable en norme $\|\cdot\|$ est convergent au sens où :*

$$\forall T = K\Delta t,\ \exists C_T > 0,\quad \sup_{n=0,\dots,K} \|u^n - \{u(t_n, x_k)\}_k\| \leq C_T\big((\Delta t)^q + (\Delta x)^p\big).$$

Étude de différents schémas pour l'équation de transport et du θ-schéma pour l'équation de la chaleur

[Développement]

Leçon 226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_u)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Le titre invite clairement à l'analyse numérique, du coup on peut recopier la leçon 233. Dans Quarteroni, Sacco, Saleri, *Numerical Mathematics*, chapitre 6, il y a les détails des méthodes itératives pour la résolution d'équations (corde, sécante, Newton...), la définition d'ordre de convergence... À noter que le cas multi-dimensionnel qui fait l'objet du chapitre suivant est absent de l'édition française...

C'est aussi intéressant de parler de l'étude qualitative des orbites : c'est l'objet du développement sur le critère de Kitai mais on peut aller plus loin en parlant d'ergodicité. Comme résultats abordables (la plupart sont dans K. Petersen, *Ergodic Theory*) il y a le théorème de récurrence de Poincaré et le théorème ergodique hilbertien (Gonnord, Tosel). On peut admettre le théorème de Birkhoff et l'utiliser par exemple pour étudier les rotations du cercle ou retrouver le critère de Weyl (dans P. Billingsley, *Probability and Measure*). On ira aussi voir chez Grégoire Clarté. Pour les orbites périodiques un résultat semi-classique à l'agrégation est le théorème de Sharkovskii mais je n'ai pas étudié la question.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Cadre : E un ensemble, $X \subset E$ et $f : X \to E$ telle que $f(X) \subset X$.

I. GÉNÉRALITÉS. CONVERGENCE. EXEMPLES CLASSIQUES.

1. Points fixes

Prop : Si E est un espace topologique et f est continue alors si $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in E$, alors $f(\ell) = \ell$.

Ex (Processus de Galton-Watson) Étude de l'extinction d'une population :
Z_n : le nombre d'individus à la n-ème génération., $n \in \mathbb{N}$.
Pour $1 \le i \le Z_n$, N_i^n est le nb de descendants de l'individu i.
$\to Z_{n+1} = N_1^n + \dots + N_{Z_n}^n$ on suppose les Z_0, N_i^n iid. On note $\mu = E[N_i^n]$ et $v_n = P(Z_n = 0)$. Si $G(s) = E[s^{Z_0}]$, $s \ge 0$ alors $v_{n+1} = G(v_n)$ et la probabilité d'extinction est $\lim_{n+\infty} v_n = v$ c'est un point fixe de G et $v \neq 0 \Leftrightarrow \mu \le 1$.

Thm (Picard) Si (X,d) est métrique complet et $f : X \to X$ est contractante alors f possède un unique point fixe $x_0 \in X$ et pour tout $x \in X$ la suite $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = x \end{cases}$ converge vers x_0 et $d(f^n(x), x_0) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x)$
Si f est k-contractante, $\lambda < 1$.

C-ex :

App : Le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Prop : Si $f : K \to K$ continue avec K compact métrisable et pour tout couple $x \neq y \in K$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ alors f a un unique point fixe $a \in K$ et pour tout $x_0 \in K$, $(f^n(x_0))_n$ cv vers a.

Ex : $f : [-\pi, \pi] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin x$ admet un unique point fixe.

2. Le cas réel

cadre : $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ segment tq $f(I) \subset I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$.

Prop (monotonie) • Si f est croissante, $(u_n)_n$ est monotone et sens sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
• Si f est décroissante, $f \circ f$ ↑ et $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotone et leur sens de monotonie est opposés

Ex :

Prop : Si $f : [a,b] \to [a,b]$ C^0, (u_n) converge $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \to 0$

Exemples classiques :
• Suites arithmétiques : $X = E$ ev et $f(x) = x + a$, $a \in E$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + na$
• Suites géométriques : $X = E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f(x) = qx$, $q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$. $(u_n)_n$ diverge si $|q| > 1$, tend vers 0 si $|q| < 1$ et est constante si $q = 1$.
• Suites homographiques : $X = E = \mathbb{K}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$

Prop On note (E) $cx^2 - (a-d)x - b = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$. On a :
• Si (E) a deux racines distinctes α/β, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$, $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
• (E) a une racine double α, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + Kn$ ou $K = \frac{c}{a - \alpha c}$

Classification des points fixes
• Si f est C^1, a point fixe de f et $|f'(a)| < 1$, $(u_n)_n$ est bien définie sur un sous-intervalle $J \subset I$ contenant a et si f' ne s'annule pas sur J et $u_0 \neq a$, $u_n \neq a$ $\forall n$ alors $u_{n+1} - a \underset{n+\infty}{\sim} f'(a)(u_n - a)$ [point fixe attractif]
• Si f est C^2, $f'(a) = 0$, f'' ne s'annule pas sur J alors si $u_0 \neq a$ et $u_n \neq a$ pour tout n, alors $u_{n+1} - a \underset{n+\infty}{\sim} \frac{1}{2} f''(a)(u_n - a)^2$ [pt fixe superattractif]
• Si $|f'(a)| > 1$, il existe $J \subset I$, $a \in J$ tq $\forall u_0 \in J$, $u_0 \neq a$, $(u_n)_n$ sort de J [point fixe répulsif].

Ex :

3. Le cas vectoriel, suite vectorielle d'ordre supérieur

Fait : Toute suite vectorielle $(u_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence d'ordre p : $u_{n+p} = f(u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$ se ramène à l'ordre 1 en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$, $F(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ f(x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}$: on a $U_{n+1} = F(U_n)$

Prop : Si $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_h u_{n-h}$, $\forall n \geq h$, $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{C}$ et si $r_1, \dots, r_q$ sont les racines de $x^h - a_1 x^{h-1} - \dots - a_h = 0$ avec multiplicités $d_1, \dots, d_q$ alors $(u_n)_n$ est de la forme $u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n$ où P_i est un polynôme tq $\deg P_i < \alpha_i$.

Ex :

II - ÉTUDE QUALITATIVE DES ORBITES.

1 - Hypercyclicité

Cadre : (E,d) $\mathbb{C}$-ev métrique complet séparable - $A \in \mathcal{L}_c(E)$.

Déf. $x \in E$ est hypercyclique lorsque $\{A^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E.

Def/Prop. L'ensemble des points hypercycliques est soit vide soit dense dans E dans ce second cas, on dit que A est hypercyclique -

Thm (Kitai) Supposons qu'existent deux parties denses de E et $B : Y \to Y$ un opérateur tq (1) $x \in X \Rightarrow A^n x \to 0$ (2) $y \in Y \Rightarrow B^n y \to 0$ (3) $y \in Y \Rightarrow ABy = y$ Alors A est hypercyclique -

Ex : Un opérateur en dimension finie n'est jamais hypercyclique -

Ex : Soit $H(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions entières. T l'opérateur de translation et D l'opérateur de dérivations sont hypercycliques -

2. Ergodicité

Cadre : $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ espace de probabilité, $T : \Omega \to \Omega$ mesurable tq $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ -

Déf : T est dit ergodique lorsque $T^{-1}A = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ -

Thm (ergodique). Soit f mesurable et intégrable. Alors :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^{k-1}\omega) = \hat{f}(\omega)$ ps où $\hat{f}$ est intégrable et $\hat{f}(T\omega) = \hat{f}(\omega)$ $\forall \omega$. avec $\mathbb{E}[\hat{f}] = \mathbb{E}[f]$. Si T est ergodique alors $\hat{f} = \mathbb{E}[f]$ ps.

Thm (Poincaré). Pour $A \in \mathcal{T}$, on note $T_A = \inf\{n \geq 1, T^n \omega \in A\}$. On a :
(i) $T_A < \infty$ p.s sur A (ii) $A \subset \{T^n \omega \in A, \text{ inf souvent}\}$ (iii) Si T ergodique et $\mathbb{P}(A) > 0$ alors $\mathbb{P}(T^n \omega \in A \text{ i.s}) = 1$.

Ex : Urnes d'Ehrenfest -

Ex : Rotations -

3. Orbites périodiques - (ÉVENTUELLEMENT)

III - APPLICATIONS EN ANALYSE NUMÉRIQUE

NEWTON

+ RÉSUMÉ DE 233

Leçon 228

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Sous ses airs de leçon taupinale pas drôle, cette leçon recèle en fait une énorme subtilité pas dégueulasse qui s'appelle le théorème fondamental du calcul. La preuve utilise comme de coutume pas mal de théorie de la mesure : tout est bien fait dans le Rudin, *Analyse réelle et complexe* mais il faut se lever tôt pour parvenir au bout. La clé de la preuve est le théorème sur les points de Lebesgue qui lui n'est pas spécialement difficile.

À noter que les fonctions absolument continues sont en fait les fonctions de $W^{1,1}$ et les résultats sur les espaces de Sobolev permettent de mieux les comprendre. On pourra consulter le livre de Evans et Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions* mais c'est un peu ardu. Je crois qu'il ne s'agit pas seulement d'un délire scriptural, les espaces de Sobolev et les fonctions à variation bornée sont des outils que l'on retrouve dans pas mal de livres d'EDP (celui d'Evans notamment). À noter qu'une fois que l'on a montré les bonnes inégalités d'injection, on montre en quelques lignes le théorème de Rademacher sur la différentiabilité presque partout des fonctions lipschitziennes (mais bien sûr c'est complètement évident puisque les fonctions localement lipschitziennes sont exactement celles de $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ et que l'inégalité de Morrey assure la différentiabilité presque partout des fonctions de $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ pour $n < p \leq \infty \dots$) . Mais on peut le montrer à la main : c'est le développement sur les fonctions à variation bornée.

Cette leçon est très largement inspirée de celle merveilleusement réalisée par Alexandre Eimer et Mercedes Haiech.

229 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle - Exemples et contre-exemples -

I - NOTIONS GÉNÉRALES DE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ.

1 - Définitions élémentaires -

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Déf (continuité). Soit $f: I \to \Omega$ une fonction. On dit qu'elle est continue en $a \in I$ lorsque pour tout voisinage V de $f(a)$ il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. On note $f \in C^0$.

Ex : les polynômes. **C-ex** : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue sur aucun point de $\mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1 \end{cases}$ C^0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ discontinue sur $\mathbb{Q}$

Déf (dérivabilité). $f: I \to \Omega$ est dite dérivable en $a \in I$ lorsque la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle dérivée de f en a.

Ex : $x \mapsto \cos x$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \sin x$. **C-ex** : $x \mapsto |x|$ pas dérivable en 0.

Déf (C^k). Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble des fonctions C^k est l'ensemble des fonctions continues, k fois dérivables et dont la dérivée k-ième est C^0. On note $C^\infty = \bigcap C^k$.

Ex : les polynômes sont C^∞. **C-ex** : $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ C^0 dérivable pas C^1.

Prop : Une fonction $f: I \to \Omega$ est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.

Prop : Une fonction $f: I \to \Omega$ est dérivable en $a \in I$ ssi f admet un DL à l'ordre 1 en a.

Prop : Si f est dérivable en a alors f C^0 en a.

C-ex : $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue mais pas dérivable en 0.

2 - Quelques théorèmes importants -

Thm (Prolongement C^0). Soit $f: I \to \Omega$. Si $a \in \partial I$ et que f admet une limite en a alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $I \cup \{a\}$ continu en a. $\tilde{f}$ est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Théorème (valeurs intermédiaires). Soit $f: I \to \mathbb{R}$ continue. Si $J \subset I$ est un intervalle alors $f(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

App : Si $I = [a,b]$, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors $\exists c \in]a,b[$, $f(c) = 0$.

C-ex : $x \mapsto \begin{cases} \cos(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue et vérifie le TVI.

Thm (Rolle). Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a, b \in I$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

C-ex : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ ne vérifie pas le théorème de Rolle.

App : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, P scindé $\Rightarrow P'$ scindé.

Thm (Accroissements finis). $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable. $\exists c \in]a,b[$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Thm (Darboux). $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Prop (Prolongement de la dérivée). Si f est dérivable sur $]a,b[\setminus \{c\}$ et $c \in]a,b[$ si f' admet une limite ℓ en c, alors f dérivable en c et $f'(c) = \ell$.

Ex : La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et même C^∞.

Thm (Taylor reste intégral) Soit $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt.$$

Thm (Taylor-Lagrange). Soit $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$ $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

C-ex : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est C^∞ mais n'est pas somme de sa série de Taylor en 0.

Déf : Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est somme de sa série de Taylor au voisinage de chacun des points de I est dite réelle-analytique.

3 - Caractérisation topologique des points de continuité, discontinuité

Thm : L'ensemble des points de continuité d'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est un G_δ.

Prop : Il n'existe pas de fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Thm : L'ensemble des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ nulle part dérivables

est dense (pour la CVU) dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$

Ex : (fonction de Weierstrass). Soit $g : x \mapsto |x|$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ / 1 périodique. Alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g(4^n x)}{4^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable

Thm : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. L'ens des points de C^0 de f' est dense dans I.

Ex : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ sinon} \end{cases}$ $\mathbb{Q} \cap]-1,1[= (r_n)_n$. $u_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x-r_n)}{2^n}$

$F :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est dérivable et F' C^0 en a ssi $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Thm (Lusin) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ mesurable (pour Lebesgue). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tq K^c soit de mesure $< \varepsilon$ et f est égale à une fonction C^0 PP sur K.

4- Fonctions analytiques, développables en série entière.

Def : $f : I \to \Omega$ est dite analytique (ou DSE) si $\forall x_0 \in I$, $\exists r > 0$, $\forall x \in B(x_0, r)$
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ $a_n \in \mathbb{C}$

Prop : Une fonction DSE est C^∞ avec $f^{(p)}(x_0) = p! a_p$. En conséquence le développement est unique.

Ex : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$; $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$.

Thm (Borel) Pour toute suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ il existe une fonction C^∞ d'une variable réelle à valeurs complexes définie sur un voisinage de 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Thm (Borquetsen) L'espace $C^\infty([0,1])$ muni de la topologie de la CVU de toutes les dérivées contient un G_δ dense de fonctions analytiques nulle part. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n! x)}{n! n}$ est C^∞ analytique nulle part.

C-ex : La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n! x)}{n! n}$ est C^∞ analytique nulle part.

II - ENTRE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

1 - Fonctions uniformément continues, absolument continues, lipschitziennes

Def (UC^0) : $f : I \to \Omega$ est uniformément C^0 lorsque
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y \in I$, $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Prop : $UC^0 \Rightarrow C^0$

C-ex : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est C^0 mais pas UC^0.

Thm (Heine) Toute fonction C^0 sur un compact est uniformément continue.

App : construction de l'intégrale de Riemann sur les fonctions réglées.

Def (AC^0) $f : I \to \Omega$ est absolument continue sur I lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in I^{2n}$ tq $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_n$, $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$

Prop : $AC^0 \Rightarrow UC^0$

C-ex : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin(\frac{\pi}{x}) \text{ si } x \in]0,1] \end{cases}$ est UC^0 sur $[0,1]$ mais pas AC^0

Def : $f : I \to \Omega$ est dite K-lipschitzienne, $K > 0$ lorsque
$\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$.

Prop : lipschitz $\Rightarrow AC^0$.

C-ex : $x \mapsto \sqrt{x}$ est AC^0 mais pas lipschitzienne.

Ex : (escalier de Cantor). On pose $f_0(x) = x$, $x \in [0,1]$ et f_n C^0 tq :
$f_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} f_n(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{3} \leq x < 1 \end{cases}$ et $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ est C^0 croissante et pas AC^0.

2 - Théorème fondamental du calcul

Ex : L'escalier de Cantor est dérivable pp sur $[0,1]$ et vérifie $f'(x) = 0$ où f' existe
En particulier, $\int_0^1 f'(t)\,dt = 0 \neq f(1) - f(0)$.

Ex : $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ et $f(0) = 0$ est partout dérivable mais $f' \notin L^1$.

Thm (Fondamental). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction C^0 croissante
Il y a équivalence entre (1) f est AC^0 (2) l'image par f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle (3) f est pp différentiable sur I et $f' \in L^1$ avec $\forall x \in [a,b]$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ AC^0. Alors f est diff presque partout sur I, $f' \in L^1$ et $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff en tout point de $[a,b]$ tq $f' \in L^1$ on a :
$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

III. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ ET DE LA DÉRIVABILITÉ POUR CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS -

1. Fonctions monotones et à variation bornée

Prop : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable -

Ex : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ une bijection - Pour $x \in [0,1]$, $A_n = \{n, \varphi(n) \leq x\}$, $x \mapsto \sum_{A_n} \frac{1}{2^n}$ est croissante sur $[0,1]$ et discontinue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ -

Prop : $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est C^0 ssi $f(I)$ est un intervalle -

Prop : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f' est monotone, alors f' est continue -

Thm : Il y a équivalence entre : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ -

(1) $\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|, a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b \right\} < \infty$ (2) Le graphe de f est rectifiable.
(3) f est la différence de deux fonctions croissantes -
Dans ce cas, on dit que f est à variation bornée - (VB)

Ex : AC° $\Rightarrow$ VB C-ex : $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$ est C^0 mais pas à VB.

Thm (Lebesgue) : Une fonction à VB est pp dérivable -

Corollaire (Rademacher) : Une fonction lipschitzienne est pp- dérivable.

2. Fonctions convexes -

Prop : Si f est convexe sur un intervalle I alors f est continue sur $\mathring{I}$ et admet une dérivée à gauche et à droite en tout point -

Prop : Si f convexe alors f monotone ou $\exists x_0 \in [a,b]$ tq $f \searrow$ sur $[a,x_0]$ et $f \nearrow$ sur $[x_0,b]$.

Prop : Si f convexe, f est lipschitzienne sur tout ~~compact~~ $[\alpha,\beta] \subset \mathring{I}$ inclus dans

Thm : Une fonction convexe est pp dérivable -

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ - Si f dérivable f convexe $\Leftrightarrow f' \nearrow$
Si f deux fois dérivable f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Corr : si $f : I \to \mathbb{R}$ convexe dérivable alors $f \in C^1(I)$.

3. Suites et séries de fonctions

Thm Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions C^0 en x_0 telles que (f_n) CVU vers f Alors f est C^0 en x_0.

Thm (Dini) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$ si $\forall x \in [a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$ et que $f \in C^0([a,b])$. Alors la convergence est uniforme -

Ap : $x \mapsto \sqrt{x}$ est limite uniforme de polynômes -

Thm (Weierstrass) Toute fonction C^0 sur $[a,b]$ est limite uniforme de polynômes -

Thm (limite simple de Baire) : Soit $(f_n) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq f_n CVS vers f. Alors f est C^0 sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$ -

Corr : Une fonction dérivée est C^0 sur un ens. dense -

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos(n!\pi x)^{2m}$ n'est continue nulle part

Thm : Soit $(f_n)_n \in C^1((a,b),\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $\exists x_0 \in [a,b]$ tq $(f_n(x_0))_n$ CV et si (f_n') CVU sur $[a,b]$ vers g alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers $f \in C^1$ avec $f' = g$.

Ex : $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est C^∞ sur $]1,+\infty[$.

C-ex : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ CVU vers 0 et f_n' CVS vers $\mathbb{1}_{\neq 0}$.

4. Intégrales à paramètre

Thm Si (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable -
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est C^0 en $t_0 \in I$ -
(iii) $\exists g \geq 0 \in L^1$, $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ pp
Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue en t_0 -

C-ex : $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\, dt$ n'est pas C^0 en 0.

Thm : Si (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable et intégrable -
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ dérivable sur I -
(iii) $\exists g \in L^1$ tq $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ pp -
Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est C^1 sur I et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$

C-ex : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ -

Leçon 229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Les fonctions à variation bornée offrent une ouverture intéressante je trouve.

Attention la propriété qui dit qu'une fonction convexe est lipschitzienne sur tout compact (donc continue) est un peu subtile en dimension plus grande que 1 (sinon c'est juste le lemme des trois pentes) : il faut d'abord montrer des propriétés de bornitude sur tout compact (minoration par une fonction affine, majoration à partir du théorème de Krein-Milman), on pourra consulter un des livres de Hirriart-Urruty et Lemaréchal. À noter que c'est faux en dimension infinie.

229 - Fonctions monotones - Fonctions convexes. Exemples et applications -

I - FONCTIONS MONOTONES

1 - Définitions - Aspects généraux -

Cadre : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle d'intérieur non vide -

Déf : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $x, y \in I$, $f(x) \leq f(y)$ dès que $x \leq y$ (resp. $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$).
f est décroissante lorsque $-f$ est croissante. f est monotone lorsque f est croissante ou décroissante -

Ex : - $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ est croissante.
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est croissante.

Prop : Une application monotone f est injective ssi elle est strictement monotone : elle induit alors une bijection de I sur $f(I)$ dont la bijection réciproque est monotone - C'est un homéo si f est C^0.

Prop : L'ensemble des fonctions croissantes $f : I \to \mathbb{R}$ est un cône positif et convexe : $\alpha, \beta > 0$, $f, g \nearrow \Rightarrow \alpha f + \beta g \nearrow$.

Prop : Si $f \geq 0$, $g \geq 0$ sont croissantes, fg est croissante -
- La composition de fonctions $\nearrow$ est $\nearrow$ et la composée d'une fonction $\nearrow$ et d'une fonction $\searrow$ est $\searrow$.
- Si $f \nearrow$ et si $f > 0$ alors $\frac{1}{f} \searrow$.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable - Alors :
- f constante $(\Leftrightarrow \forall t \in I, f'(t) = 0$.
- f croissante $(\Leftrightarrow f' \geq 0$ et strictement croissante ssi $f' > 0$.

2 - Propriétés de régularité

Prop : Une application monotone est une fonction réglée (limite uniforme de fonctions en escalier)

Corollaire : Une application monotone admet une limite à gauche et à droite en tout point -

Prop : L'ensemble des points de discontinuité d'une application monotone est au plus dénombrable -

Aff : L'ensemble des atomes d'une variable aléatoire réelle est au plus dénombrable -

C-ex : Une fonction monotone n'est pas nécessairement absolument continue (Escalier de Cantor).

3 - Fonctions à variations bornées -

Déf : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application - On définit la variation totale de f sur $[a,b]$: $V_{[a,b]}(f) = \sup_\sigma \sum_{i=0}^{\hat{n}-1} |f(\sigma_{i+1}) - f(\sigma_i)|$ où σ parcourt les subdivisions $a = x_0 < \dots < x_n = b$ de $[a,b]$ -

Prop/déf : Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $V_{[a,b]}(f) < \infty$ (ii) le graphe de f est rectifiable (iii) f est la différence de deux fonctions croissantes

Dans ce cas, on dit que f est à variation bornée - (VB)

Ex : Une fonction absolument continue, lipschitzienne est à VB -

C-ex : $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est C^0 sur $[0,1]$ mais pas à VB -

Prop : Les fonctions à VB forment un ev qui est engendré par les fonctions $\nearrow$.

Thm (Lebesgue) : Une fonction à VB est pp dérivable (au sens de la mesure de Lebesgue)

Corollaire (Rademacher) : Une fonction lipschitzienne est pp différentiable (vrai en dimension quelconque).

4- Suites de fonctions monotones : théorèmes de Helly et de Dini.

Théorème (Dini) Une suite de fonctions croissantes $[a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement converge uniformément.

Ex : $x \mapsto \sqrt{x}$ est limite uniforme de polynômes.

Théorème (Helly) Une suite de fonctions croissantes $\mathbb{R} \to [0,1]$ admet une sous-suite qui CVS (vers une fonction croissante).

App (théorème de Prokhorov sur la compacité des mesures de proba pour la convergence en loi.) : Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probas sur $\mathbb{R}$ tendue au sens où $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall n, \mu_n([-M,M]) \geq 1-\varepsilon$ alors $\exists \mu$ une mesure de proba tq $\mu_n \Rightarrow \mu$.

II - FONCTIONS CONVEXES

Dans la suite $C \subset E$ est une partie convexe de E, un $\mathbb{R}$-ev de dim finie avec $\mathring{C} \neq \emptyset$.

1- Définitions - aspects généraux.

Déf. On dit que $f : C \to \mathbb{R}$ est :

- $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$. (convexe)
- strict. convexe lorsque $\forall x \neq y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) < (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$
- α-convexe, $\alpha > 0$, $\forall x \neq y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2$

concave lorsque $-f$ convexe

Prop : α convexe $\Rightarrow$ strict convexe $\Rightarrow$ convexe.

Ex : $x \mapsto x^n$ convexe mais pas strict. sur $\mathbb{R}_+$
$x \mapsto e^x$ strict convexe sur $\mathbb{R}$ - mais pas α-convexe.
$x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est α-convexe, $\alpha = \lambda_{\min}(A) > 0$

Prop : $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+$, tout $(x_0, \dots, x_n) \in C^{n+1}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$, $f(\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Prop : f est convexe ssi $\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) \in C \times \mathbb{R}, f(x) \leq y\}$ est convexe.

Prop : La convexité est stable par somme, supremum mais pas composition

Rem : Si f, g convexe et $f \uparrow$ (au sens large) alors $f \circ g$ convexe

Prop : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est convexe alors f croissante ou bien $\exists x_0 \in (a,b)$ tq $f \downarrow$ sur $[a,x_0]$ et $f \uparrow$ sur $[x_0,b]$.

Prop : f convexe $I \to \mathbb{R} \Leftrightarrow f$ au dessus de toute tangente. App : $e^x \geq x+1$, $\log x \leq x-1$

2- fonctions convexes et régularité.

Théorème (caractérisation des fonctions convexes différentiables)

* Si f est différentiable sur C, on a :

f convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in C$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall x,y \in C$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

(f strict. convexe : idem avec $>$)

f α-convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in C$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq \alpha \|y-x\|^2$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in C$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$.

* Si f est deux fois différentiable sur C, on a :

f convexe $\Leftrightarrow \forall x \in \mathring{C}, \forall h \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{C}, \nabla^2 f(x)$ a ses vap ≥ 0.

f strict. convexe $\Leftarrow \forall x$, $\nabla^2 f(x)$ est déf pos (c-ex : $x \mapsto x^4$).

f α-convexe $\Leftrightarrow \forall x \in C, \forall h \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$

Prop : $f : C \to \mathbb{R}$ convexe est lipschitzienne sur tout compact.

Prop : $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe alors f est continue sur $\mathring{C}$.

c-ex :

Prop : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe admet des dérivées à gauche et à droite en tout point

Lemme (3 cordes) $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $a < b < c$, alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Prop : Une fonction convexe est p.p. dérivable. (GTZ)

III - INÉGALITÉS ET OPTIMISATION -

1 - Inégalités de convexité.

Prop (arithmético-géom) Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ alors $(a_0 \dots a_{n-1})^{1/n} \leq \frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n}$.

Aff : $a, b, c \geq 0$, $8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$.

Prop (Hölder). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré, $f, g \in L^p, L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ -
Alors $fg \in L^1$ et $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Aff : inégalité de Minkowski, $(L^p, \| \|_p)$ est un evn.

Aff : det : $\mathcal{S}_n^{++} \to \mathbb{R}$ est log-concave.

Aff : (John-Loewner). Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact tq $\mathring{K} \neq \emptyset$. Alors il existe un unique ellipsoïde $\mathcal{E}$ centré en 0 de volume minimal tel que $K \subseteq \mathcal{E}$.

Aff : $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous groupe compact. Alors il existe une forme quadratique tq $G \subset \mathcal{O}(q)$.

Prop. (Jensen) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe, $f : [0,1] \to I$ une application mesurable alors $\varphi(\int_0^1 f d\mu) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f) d\mu$. (AVANT AG)

Aff φ convexe $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$ ex : $\varphi = |\cdot|$

Prop (Kantorovich). Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ ses vap. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
$\|x\|^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}} + \sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}} \right]^2 \|x\|^4$

Aff : cf algorithme de gradient.

2. Extrema des fonctions convexes

Prop : K convexe fermé, $J : K \to \mathbb{R}$ ~~convexe~~.
(1) Si J convexe admet un min local en un point alors il est global
(2) Si J strict- convexe admet au plus un minimum et il est strict
(3) Si J α-convexe alors J admet un minimum -

Thm (dim infinie). Si $J : K \to \mathbb{R}$ convexe continue, K convexe fermé d'un Hilbert, alors J atteint un min strict. ~~glob~~ -

3. Algorithmes de minimisation -

[Ciarlet] voir leçon 253 -

éventuellement : log-convexité et fonction Γ.

Leçon 233

Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

On peut quasiment tout reprendre dans le livre de P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.*

Attention tout ce qui concerne Gauss, LU ou Newton est assez hors-sujet. De même la partie sur les schémas numériques pour les EDO : je crois que le jury veut juste qu'on présente des schémas pour montrer comment on est amené à résoudre des systèmes linéaires avec des matrices symétriques...

En revanche, on peut dire plus sur la recherche des valeurs propres, notamment à partir de la décomposition QR qui donne une méthode qui renvoie toutes les valeurs propres (dans l'ordre s'il-vous-plait) mais l'analyse est un peu difficile, voir Ciarlet, Quarteroni-Sacco-Saleri ou Lax, *Linear Algebra.*

Pour l'option B, cette leçon c'est de l'eau.

233. Méthodes itératives en analyse numérique matricielle

I - GÉNÉRALITÉS SUR L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE [Ciarlet]

1- Normes matricielles -

Déf/Prop : Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$, l'application aussi notée $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par $\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appelée norme subordonnée à $\|\cdot\|$. C'est une norme d'algèbre : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Ex : Pour les normes vectorielles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, on a :
- $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)}$, ρ rayon spectral
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

Prop (Frobénius) L'application $\|\cdot\|_{Frob} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par : $\|A\|_{Frob} = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{Tr(A^*A)}$ est une norme matricielle non subordonnée. On a $\|A\|_2 \leq \|A\|_{Frob} \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2$.

Thm (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque. Alors $\rho(A) \leq \|A\|$.
(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \|\cdot\|$ subordonnée telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Thm. (1) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|B\| < 1$. Alors $I_n + B$ est inversible et $\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$.
(2) Si $\ker(I+B) \neq \{0\}$, alors pour toute norme matricielle : $\|B\| \geq 1$

Thm : Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il y a équivalence entre :
(i) $\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$ (ii) $\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0$, $\forall v \in \mathbb{C}^n$ (iii) $\rho(B) < 1$
(iv) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée

Thm : Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque. Alors $\lim_{k \to +\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$.

2- Conditionnement

Déf : Soient $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible. On définit le conditionnement $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Prop : $K(A) \geq 1$ et $K(A^{-1}) = K(A)$ et $K(\alpha A) = K(A)$ pour tout $\alpha \neq 0$.

Thm (1) Soient A inversible, u et $(u + \delta u)$ les solutions des systèmes linéaires $Au = b$ et $A(u+\delta u) = b + \delta b$, $b \neq 0$. Alors $\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

(2) Soient u et $(u+\delta u)$ les solutions des systèmes linéaires : $Au = b$ et $(A+\delta A)(u+\delta u) = b$, $b \neq 0$ Alors $\frac{\|\delta u\|}{\|u+\delta u\|} \leq K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
Ces inégalités sont optimales.

Thm. Soit A diagonalisable, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que $\|\mathrm{diag}(d_i)\| = \max_i |d_i|$ pour toute matrice diagonale. Alors $sp(A+\delta A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ où $D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z - \lambda_i| \leq K(P) \|\delta A\|\}$.

3- Propriétés particulières aux matrices symétriques et hermitiennes -

Déf : Si A est hermitienne, on définit son quotient de Rayleigh :
$R_A(v) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle}$, $v \neq 0$

Thm : Si $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres ordonnées de A, on a :
(1) $\lambda_k = R_A(v_k)$ où $Av_k = \lambda_k v_k$ (2) $\lambda_n = \max_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(v)$ (3) $\lambda_1 = \min_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(v)$
(4) $\{R_A(v), v \in \mathbb{C}^n\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}$.

Rem : le théorème de Courant-Fischer donne une caractérisation de toutes les vap.

Prop Soient A et $A+\delta A$ deux matrices hermitiennes de vap $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ et $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$. Alors $|\alpha_k - \beta_k| \leq \|\delta A\|_2$, $1 \leq k \leq n$.

II - MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES -

Cadre : Résoudre $Ax = b$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

1- Méthodes directes

Thm (Gauss) : Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, il existe $M \in GL_n(K)$ tq MA soit triangulaire supérieure

Algorithme. Pour p de 1 à n faire :
- Si $a_{pp} \neq 0$, annuler a_{jp}, $j>p$ en multipliant A par $T_{jp}\left(-\frac{a_{jp}}{a_{pp}}\right)$
- Si $a_{pp}=0$, permuter $L_p \leftrightarrow L_j$, $j>p$ telle que $a_{jp}\neq 0$. Si une telle ligne n'existe pas, passer à l'étape suivante.

Aff : $Ax=b \iff MAx = Mb$

Rem : L'algorithme demande $O(n^3)$ opérations.

Ex :
$$\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 = 12 \\ 5u_1 - 6u_2 + 2u_3 = -1 \\ -4u_1 + 2u_2 + u_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 = 12 \\ -8u_2 + u_3 = -13 \\ \frac{9}{4}u_3 = \frac{27}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 3 \end{cases}.$$

Thm (LU) Soit $A=(a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe L, U resp. triangulaires inférieure et supérieure telles que $A=LU$ et $l_{ii}=1$, $1\leq i\leq n$. Cette factorisation est unique.

Ex : Si A est tridiagonale, on peut calculer sa décomposition LU et résoudre $Ax=b \iff \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$ en $O(n)$ opération.

2. Méthodes itératives

But : construire une suite $(x_k)_k$ qui converge vers la solution de $Ax=b$.

Idée : écrire $Au=b \iff u=Bu+c$ et calculer $u_{k+1}=Bu_k+c$.

Thm (convergence) La méthode converge ssi $\rho(B)<1$.

Ex : On écrit $A=M-N$ avec M "facile à inverser" : $B=M^{-1}N$; $c=b$.

Méthode	$A=M-N$	$M^{-1}N$	itération
Jacobi	$A=D-(E+F)$	$J=D^{-1}(E+F)=I-D^{-1}A$	$Du_{k+1}=(E+F)u_k+b$
Gauss-Seidel	$A=(D-E)-F$	$\mathcal{L}_1=(D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1}=Fu_k+b$
Relaxation	$A=\left(\frac{D}{\omega}-E\right)-\left(\frac{1-\omega}{\omega}D+F\right)$	$\mathcal{L}_\omega=\left(\frac{D}{\omega}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D+F\right)$	$\left(\frac{D}{\omega}-E\right)u_{k+1}=\left(\frac{1-\omega}{\omega}D+F\right)u_k+b$

- $-E$: partie triang. inf. stricte
- $-F$: partie triang. sup. stricte
- D : diagonale
- $\omega \in \mathbb{C}^*$

Thm : Si A hermitienne déf pos, si M^*+N déf pos, alors $\rho(M^{-1}N)<1$.

Aff : Si A hermitienne déf pos, si $0<\omega<2$ alors la méthode de relaxation CV

Thm : $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega-1|$ donc la méthode relax CV $\Rightarrow 0<\omega<2$.

Thm : Si A tridiagonale (par blocs), alors $\rho(\mathcal{L}_1)=\rho(J)^2$.

3. Méthodes de gradient : minimisation de fonctionnelles quadratiques.

Cadre : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Thm : La solution de $Ax=b$ minimise $E(y)=\frac{1}{2}\langle y, Ay\rangle - \langle y, b\rangle$

Déf. On appelle méthode de descente une méthode itérative de la forme : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$, $\alpha_k=\frac{\langle d_k, r_k\rangle}{\|d_k\|_A^2}$ où $r_k=b-Ax_k$, $\|\cdot\|_A^2=\langle \cdot, A\cdot\rangle$

Thm : $\|x_{k+1}-x\|_A^2=(1-\sigma_k)\|x_k-x\|_A^2$ où $\sigma_k=\frac{\langle d_k, r_k\rangle}{\|d_k\|_A^2\|r_k\|_{A^{-1}}^2} \in [0,1]$.

Ex : méthodes de gradient : [Lax], [GOSS]
- Pas optimal : $d_k=r_k=-DE(u_k)$ alors $\|x_k-x\|^2 \leq \kappa(A)\left(1-\frac{1}{\kappa(A)}\right)^n \|x_0-x\|^2$
- Conjugué : $d_{k+1}=r_{k+1}-\beta_k d_k$, $r_{k+1}=r_k-\alpha_k d_k$, $d_0=r_0$, $\beta_k=\frac{\langle r_{k+1}, Ad_k\rangle}{\|d_k\|_A^2}$

Prop : La méthode de gradient conjugué converge (stationne) vers la solution du problème en au plus n itérations.

Rem : On peut aussi choisir $d_k=-DE(u_k)$ et $\alpha_k \equiv \alpha$ constant : dans ce cas $\|x_{k+1}-x\| \leq \|I-\alpha A\|\|u_k-u\|$ et $\alpha_{opt}=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ [Ciarlet].

III. RECHERCHE DE VALEURS PROPRES ET DE VECTEURS PROPRES

1. La méthode de la puissance. [GOSS]

Cadre : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de vecteurs propres $x_1, \dots, x_n$ associés aux vap $|\lambda_1|>|\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ où λ_1 est de multiplicité algébrique égale à 1.

Algorithme : choisir $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et calculer :
$z^{(k)}=Aq^{(k-1)}$, $q^{(k)}=\frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2}$ et $\nu^{(k)}=\langle q^{(k)}, Aq^{(k)}\rangle$.

Prop : $\forall k \geq 1$, $q^{(k)}=\frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}$.

Thm : Si $q^{(0)}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ alors :
$\|\tilde{q}^{(k)}-x_1\|_2 \leq C\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ où $\tilde{q}^{(k)}=\frac{q^{(k)}\|A^k q^{(0)}\|_2}{\alpha_1 \lambda_1^k}=x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i$
et $\lim_{k\to+\infty} \nu^{(k)}=\lambda_1$.

2. Méthode de la puissance inverse - Localisation des valeurs propres.

Thm (Gershgörin) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$ où

$\mathcal{D}_i=\{z \in \mathbb{C},\ |z-a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$.

But : On cherche la valeur propre la plus proche de $\mu \in \mathbb{C}$, notée λ_m

Algorithme : choisir $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et calculer :

$(A-\mu I) z^{(k)} = q^{(k-1)}$; $q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2}$ et $\sigma^{(k)} = \langle q^{(k)}, A q^{(k)} \rangle$

Thm : Si $\tilde{q}^{(k)} = x_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_m} \left(\frac{\lambda_m - \mu}{\lambda_i - \mu} \right)^k x_i$ (colinéaire à $q^{(k)}$)

$\lim_{k \to +\infty} \tilde{q}^{(k)} = x_m$ et $\lim_{k \to +\infty} \sigma^{(k)} = \lambda_m$.

IV. SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LES EDO ET LES EDP.

1. Le cas des EDO

Cadre : (c) $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $t \in [0,T]$, $T = Nh$, $t_i = ih$, $i \in \{0, \dots, N\}$

Notation : y_n approximation de $y(t_n)$.

Déf : (schéma numérique) $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$ où ϕ est donné explicitement ou implicitement.

Ex : Euler explicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$

Déf. Le schéma est consistant à l'ordre $q \geq 1$ lorsque la solution y (supposée régulière) de (c) vérifie : $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\phi(t_n, y(t_n), h) + \mathcal{O}(h^{q+1})$

Déf. Le schéma est stable lorsqu'il existe $C_T > 0$ tq si

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ y_0 = y_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, y_n, h) + \varepsilon_n \\ z_0 = z_0 \end{cases}$

alors $\max_{n=1,\dots,N} \|y_n - z_n\| \leq C_T \left(\|y_0 - z_0\| + \sum_{n=1}^{N} \|\varepsilon_n\| \right)$.

Thm. Un schéma consistant d'ordre q et stable est convergent au sens où $\exists C_T > 0$, $\forall h > 0$, $\max_{n=1,\dots,N} \|y_n - y(t_n)\| \leq C_T h^q$.

Ex : Les schémas d'Euler sont convergents d'ordre 1.

2. Le cas des EDP linéaires

Cadre : EDP linéaire, $u_0(x)$ condition initiale, $x \in [0,1]$, $u(t,x)$ solu°

Notation : $\Delta t > 0$, $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, u_j^n approx $u(t_n, x_j)$

Déf (schéma linéaire) : $u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \phi(\Delta t, \Delta x, u^n)$, ϕ linéaire

Déf Le schéma est dit consistant d'ordre p en espace et q en temps lorsque $\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} - \phi(\Delta t, \Delta x, \{u(t_n, x_k)\}_k) = \mathcal{O}\left((\Delta t)^q + (\Delta x)^p \right)$

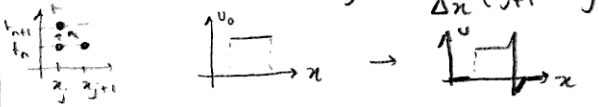
Déf. Le schéma est dit stable en norme $\|\cdot\|_p$ (norme ℓ^p) lorsque $\forall T > 0$, $\exists C_T > 0$, $\sup_{n=0,\dots,\frac{T}{\Delta t}} \|u^n\|_p \leq C_T \|u^0\|_p$ (u^0 discrétisation de la CI)

Thm (Lax) Un schéma consistant d'ordre $\mathcal{O}\left((\Delta t)^q + (\Delta x)^p \right)$ et stable en norme $\|\ \|_p$ est convergent au sens où $\sup_{n=0,\dots,\frac{T}{\Delta t}} \|u^n - \{u(t_n, x_k)\}_k\|_p \leq C_T \left((\Delta t)^q + (\Delta x)^p \right)$

3. Exemples pour l'équation de transport

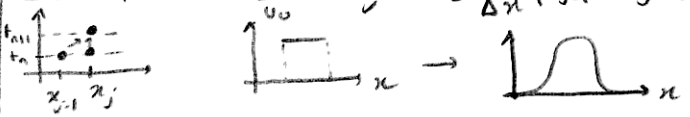
Cadre : $\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0 \\ u(0,\ ) = u_0 \end{cases}$, $c > 0$, $t, x \in \mathbb{R}$. (on sait que $u(t,x) = u_0(x - ct)$)

schéma downwind : $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n)$ instable



(viole le principe du maximum)

schéma upwind : $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j-1}^n - u_j^n)$ stable pour $c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$



(diffusion numérique).

4. Le θ-schéma pour l'équation de la chaleur (conditions de Dirichlet)

Cadre : $\begin{cases} \partial_t u = \nu \partial_{xx}^2 u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$, $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+^*$, Pour tout $n \geq 0$, $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$

θ-schéma : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \theta\nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$

i.e. $(Id + s\theta A) u^{n+1} = (Id - s(1-\theta)A) u^n$ où $\theta \in [0,1]$, $s = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ et

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$.

Thm • Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et d'ordre 2 en temps et en espace si $\theta = 1/2$.

• Le schéma est stable en norme ℓ^2 :

- inconditionnellement si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$
- condition CFL $2(1-2\theta)\nu \Delta t \leq (\Delta x)^2$ si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.

Leçon 234

Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Deux résultats me paraissent difficiles mais (quasiment) incontournables :

- La densité des fonctions continues à support compact dans les L^p : c'est important parce qu'on s'en sert pour montrer la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ ou le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (avec un produit de convolution) mais Brézis l'admet et ne dit pas comment on fait... Une façon de faire est de passer par le théorème de Lusin dont on trouve la preuve dans un exercice corrigé de l'*Analyse fondamentale* de S. Dolecki (la preuve de la densité est en corollaire juste après). Le théorème de Lusin est en lui-même intéressant. À noter qu'on peut aussi le prouver assez facilement à partir du théorème d'Egorov et de la densité des fonctions continues à support compact dans L^1...
- Le théorème de dualité entre les L^p : Brézis propose une preuve basé sur le théorème de Milman-Pettis et l'uniforme convexité des L^p, j'ai trouvé ça un peu délicat mais il existe une autre preuve basée sur le théorème de Radon-Nikodym que l'on trouve aussi dans le livre de S. Dolecki.

Une généralisation du théorème de convergence dominée est souvent mentionnée comme un résultat de probabilistes : c'est le théorème de Vitali (?) qui suppose l'uniforme intégrabilité et la convergence en mesure (voir Billingsley, *Probability and Measure* ou Walsh, *Knowing the Odds*).

Je ne sais pas pourquoi j'ai écrit « moindres carrés »à un endroit... Je voulais sûrement dire « construction de l'espérance conditionnelle ».

Comme d'habitude le livre de P. D. Lax, *Functional Analysis* contient de jolies choses.

234 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

I- CONSTRUCTION. PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES -

1. Construction

Cadre : $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré.

Déf (espace $\mathcal{L}^p$) : $\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K}$ μ-mesurable, $\int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K}$ μ-mes, $\inf\{M>0, \mu(|f|>M)=0\} < \infty \}$

Prop : Les applications $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ et $\|f\|_\infty = \text{supess}(|f|)$ sont des semi-normes respectives sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Déf (espace L^p) : Pour $1 \leq p \leq \infty$, on pose $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-pp.

Prop (Hölder) Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et f, g μ-mesurables. Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Prop (Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty]$, f, g μ-mesurables. Alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Corollaire Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

2. Liens entre les espaces L^p

Prop : Si $\mu(X) < \infty$ et $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.
En particulier $L^q \subset L^p$

Ex : Si $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ avec μ mesure de comptage, on note $L^p(\mu) = \ell^p(\mathbb{N})$ et si $1 \leq p \leq q < \infty$ alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

Prop (interpolation) : Si $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors $f \in L^r(X)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$ avec $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

C-ex : ...

Prop : • Pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{K}$, $\|f\|_\infty \leq \liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p$
• $\forall f \in \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{L}^p(\mu)$, $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

3. Convergence des suites de fonctions

Thm (Beppo-Levi) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f = \lim f_n$ est mesurable et $\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$.

Thm (Fatou) : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$

Thm (Lebesgue) : Soit $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de L^p qui CV pp vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g \in L^p$ tq $\forall n$, $|f_n| \leq g$ pp. Alors $f_n \to f$ dans L^p.

Ex :

Thm (Riesz-Fischer) $L^p(\mu)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$

Prop : Soit $(f_n)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$ tq $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe une sous-suite qui converge presque partout vers f et qui est uniformément majorée par une fonction de L^p.

App.

Prop : Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, la convergence L^p implique la convergence en probabilité.

C-ex :

Prop : La réciproque est vraie en supposant l'uniforme intégrabilité.

App (loi des grands nombres).

II - PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES

1 - Théorèmes de densité

Cadre : $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace métrique (localement compact) séparé (complètement régulier) borélien sur lequel μ est une mesure régulière i.e. pour tout $A \in \mathcal{T}$

$\sup\{\mu(K), K \text{ compact } K \subset A\} = \mu(A) = \inf\{\mu(O), O \text{ ouvert } A \subset O\}$.

Lemme (Urysohn) Si F_1, F_2 sont deux fermés disjoints de $(X, \mathcal{T}, \mu)$, il existe $h : X \to [0,1]$ C^0 telle que $h \equiv 1$ sur F_1 et $h \equiv 0$ sur F_2.

Thm Si f est mesurable positive, f est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables.

Thm (Lusin) Soit f mesurable avec $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in C_c(X)$ et un compact K tels que

$K \subset \{h = f\}$ et $\mu(\{f \neq 0\} \setminus K) < \varepsilon$.

Théorème Soit $1 \leq p < \infty$. Alors $C_c(T)$ est dense dans $L^p(X)$.

Théorème $L^p(\mu)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

C-ex : L^∞ n'est pas séparable.

2 - Dualité dans les L^p

Thm On suppose $1 \leq p < \infty$ et μ mesure σ-finie. Si $\phi \in L^p(\mu)'$ alors il existe un unique $g \in L^{p'}(\mu)$ tel que $\forall f \in L^p(\mu)$, $\phi(f) = \int_X fg \, d\mu$ et $\|\phi\| = \|g\|_{p'}$.

Conséquence : $L^p(\mu)' \simeq L^{p'}(\mu)$ (isomorphisme isométrique)

Rem : La preuve repose sur le thm de Radon-Nikodym. [Il y a une autre preuve qui elle repose sur l'uniforme convexité et la réflexivité des L^p].

Corollaire Si $1 < p < \infty$ alors $L^p(\mu)$ est un Banach réflexif.

C-ex : $L^1(\mu)$ n'est pas réflexif. $L^\infty(\mu)$ non plus.

3 - Le cas $X = \mathbb{R}^d$: convolution, approximation, compacts

Thm/def Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et on pose $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$

On a $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.

Thm (Young) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est bien défini et $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.

Prop $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ est une algèbre sans unité.

Prop Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$ où $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $k \in \mathbb{N}$.

Déf : On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_n$ telle que : $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Supp}\rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Thm Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Thm (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, soit $\omega \subsetneq \Omega$, soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ tel que : $\forall f \in \mathcal{F}$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < \delta$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

III - STRUCTURE HILBERTIENNE DE L^2

Prop $L^2(X)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(t)}g(t)\,d\mu(t)$ est un espace de Hilbert

- PROJECTION, RIESZ → MOINDRES CARRÉS -

- BASE HILBERTIENNE, INJECTION ℓ^2, POLYNÔME ORTHOGONAUX ET EXEMPLE HERMITE

- ANALYSE DE FOURIER : FÉJER, BARGMAN

→ VOIR 213

1

IV - DEUX UTILISATIONS DES ESPACES L^p

1 - Espaces de Sobolev et résolution d'EDP

REPRENDRE 250, PEUT ÊTRE 222 (ELLIPTIQUE ?)

2. En probabilités : problèmes de moments -

REPRENDRE 260.

Leçon 235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

C'est une leçon toute trouvée pour résoudre des EDP linéaires d'évolution par transformée de Fourier...

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

I. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : PROPRIÉTÉS LOCALES DE LA LIMITE OU DE LA SOMME.

1. Régularité sous convergences simple et uniforme.

Prop. Soit X espace métrique. Une limite uniforme d'une suite de $C(X, \mathbb{K})$ est continue.

Ex. $U_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout compact vers $\exp$.

C-ex : $u_n : x \mapsto e^{-nx}$ converge simplement vers $u : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ x \mapsto 0 \end{cases}$

Prop (intégration). Si $I \subset \mathbb{R}$ est de longueur finie et $(f_n)_n$ CVU vers f.
$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$. De plus $F : I \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est limite uniforme de la suite des $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,dt$.

Coro : Si $\sum g_n$ CVN sur I de longueur finie, $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt$

Prop (dérivation). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions C^1, $[a,b] \to \mathbb{K}$.
On suppose (a) $\exists\, x_0 \in [a,b]$, $(f_n(x_0))_n$ converge
(b) (f_n') CVU vers une fonction g.
Alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers f C^1 vérifiant $f' = g$.

Coro (classe C^k). On suppose $(f_n \in C^p$ et $\forall k \in \{0, \dots, p\}, (f_n)_n$ CVU alors la limite de $(f_n)_n$ est C^k et il y a CVU des dérivées.

Ex : Soit $u \in E$, E algèbre normée complète. $e_u : \mathbb{R} \to E, t \mapsto \exp(tu)$ est de classe C^∞.

2. Limite en un point.

Thm (double limite). Si (f_n) CVU vers f sur X espace métrique, si les fonctions $(f_n)_n$ ont des limites finies en $a \in X$ alors il en est de même pour f et $\lim_{y\to x} \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{y\to x} f_n(x)$.

Ex : $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \xrightarrow[s\to 1^+]{} \infty$

C-ex : $x \mapsto x^n$ en $x = 1$.

3. Cas particuliers des séries entières.

Déf/Lemme (Abel). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ CV absolument
(ii) $\forall\, 0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ CVN dans $\overline{B}(0,r)$.
Le rayon de CV de la série entière est $R = \sup\{r \geq 0,\ (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$

Prop. $\sum a_n z^n$ CVN sur tout compact inclus dans le disque ouvert de CV. En conséquence $\sum a_n z^n$ est holomorphe dans $\mathring{B}(0,R)$.

Thm (Cauchy). $\forall r \in]0,R[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta}\,d\theta$.

Ex et C-ex :
- $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge sur tout le cercle $\{|z| = 1\}$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge sur tout le cercle $\{|z| = 1\}$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ et converge pour $z = -1$.

Thm (Abel angulaire). Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1.
Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in (-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$
Si $\sum a_n$ CV alors $\lim_{z\to 1, z\in\Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Théorème (Tauber faible). Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ et $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$ alors $\sum a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Thm (Tauber fort). Si $a_n = O(\frac{1}{n})$ et $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$ alors $\sum a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

II - INTERVERSIONS ET THÉORIE DE L'INTÉGRATION -

1 - Théorèmes fondamentaux -

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Thm (Beppo-Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors $\lim f_n$ est mesurable et :
$\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu$ -

Aff -

Thm (Fatou). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives
Alors $0 \leq \int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu$ -

Aff :

Thm (Convergence dominée). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables telles que : (i) μ-pp. $(f_n(x))_n$ CV. vers $f(x)$ (ii) $|f_n| \leq g \in L^1$ a.e.
Alors $f, f_n \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Aff : Rademacher ?

Thm (Fubini-Tonelli) Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}_+$, μ, ν mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ et $\mu \otimes \nu$ la mesure produit sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$
(a) $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ sont resp $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables -

(b) $\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$
$= \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$ -

Thm (Fubini) Même conclusion si $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$.

Aff : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$

Aff : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ -

Aff : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ [transformée de Laplace -]

↑ éventuellement : paragraphe sur les intégrales semi-CV (critère de Cauchy) -

2 - Le cas des intégrales à paramètre

REPRENDRE LE DÉBUT DE 239 : C^0, dériv, sommat°, Laplace

III. APPLICATIONS À L'ANALYSE DE FOURIER.

COMME D'HABITUDE :

- DÉF SUR $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- FORMULE D'INVERSION (CVD)
- EXTENSION À L^1 et L^2
- CALCULS
- SCHRÖDINGER.

Leçon 236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Le début est dans le Gourdon. La partie sur l'intégration numérique est dans Quarteroni, Sacco, Saleri et dans Candelpergher pour la partie intégration de Gauss (j'en parle très peu).

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles -

I. CALCULS D'INTÉGRALES POUR UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE. MÉTHODES DIRECTES -

1. Calcul de primitives

Thm : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, différentiable en tout point de $[a,b]$ et dont la dérivée $f'\in L^1([a,b])$. (au sens de Lebesgue). Alors $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt$ pour tout $a\le x\le b$.

C-ex : L'escalier de Cantor.

Fonction	$x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\neq -1$	$x\mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Primitive	$x\mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x\mapsto \log\lvert x\rvert$	$\arcsin x$	$\arctan x$	$\log(x+\sqrt{1+x^2})$

Thm (changement de variable linéaire). Soient $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$. Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\,dx=\frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$.

App (Primitive des fractions rationnelles) Si f est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples et on calcule :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases}\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, & \text{si } k\neq 1\\ \log|x-a|+C, & \text{si } k=1\end{cases}$$

Ex : $\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x-j}-\frac{1}{x-j^2}\right)$

2. Intégration par parties et changement de variable.

Prop : Si $u,v:[a,b]\to\mathbb{C}$ sont C^1 alors : $\int_a^b uv'=[uv]_a^b-\int_a^b u'v$

Ex (Wallis) Pour $n\in\mathbb{N}$, on calcule $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ en établissant par IPP la relation $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.

Ex $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $\forall n>0$.

Ex : $I_n=\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^n}$ vérifie $2nq^2I_{n+1}=(2n-1)I_n+\frac{t}{(t^2+q^2)^n}$

Thm (Changement de variable) Soient U,V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f:V\to U$ boréliennes, $\varphi:U\to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $f\in L^1(V)$ alors :

$$\int_V f(x)\,dx=\int_U f\circ\varphi(u)\,|\det \mathrm{Jac}\,\varphi|(u)\,du$$

Ex (coordonnées polaires) $\varphi:(\mathbb{R}_+^*\times)]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{R}_-\times\{0\}\}$, $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $\det \mathrm{Jac}\,\varphi(r,\theta)=r$

App (Fractions rationnelles en sin, cos) On effectue le changement de variable $t=\tan(\frac{x}{2})$, $dt=\frac{1}{2}(1+x^2)\,dx$, $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$.

Ex : $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{dx}{3+\sin x}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Ex (règles de Bioche) Si $R(\sin x,\cos x)\,dx$ est invariant par $x\leftarrow\pi-x$ (resp $x\leftarrow -x$, $x\leftarrow\pi+x$) on pose $t=\sin x$ (resp $t=\cos x$, $t=\tan x$)

Ex : une primitive de $\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$ est $\cos x-2\arctan(\cos x)+C$.

3. Théorème de Fubini, intégration multi-dimensionnelle -

Thm (Fubini) Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ des espaces mesurés, $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ mesurable et intégrable pour la mesure produit $\mu\otimes\nu$ alors $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y\mapsto\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables et $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu(x,y)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\int_X\cdots$

Aff (intégrale de Gauss) Un changement de variable en coordonnées polaires montre que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

App Le théorème de Fubini pour $\iint e^{-xy} \sin x \, dx dy$ montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Aff (Volume de la boule unité). On note $V_d = \int_{B(0,1)} dx_1 \dots dx_d$. On a :

$V_d = \frac{2\pi}{d} V_{d-2}$ donc $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$ si d pair et $V_d = \frac{2^d \pi^{(d-1)/2} ((d-1)/2)!}{d!}$ d impair

II - ANALYSE COMPLEXE

Thm (Formule des résidus) Soit U un ouvert simplement connexe, $a_1, \dots, a_n \in U$ et soit f une fonction analytique dans $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Si γ est un lacet C^1 fermé homotope à un point, alors

$$\int_\gamma f \, d\zeta = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} n_\gamma(a_k) \operatorname{Res}_{a_k}(f).$$

Ex : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2} = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{2}{\zeta^2 - 4\zeta + 1} d\zeta = 2i\pi \operatorname{Res}(f, 2-\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

App : Le nombre de zéro de f dans $D(0,r)$ est $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

III - APPLICATIONS DE CES RÉSULTATS À DES QUESTIONS LIÉES À L'ANALYSE DE FOURIER

Déf La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie par :

$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}u(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$.

Ex : Le théorème des résidus pour le contour ... montre que si $u(x) = e^{-ax^2}$ alors $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$.

Ex : En dimension d les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètre montrent que si $u(x) = e^{-a|x|^2}$, alors $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$

Prop : La transformée de Fourier est un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui s'étend de manière unique en une isométrie $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ et en une application $L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$

Prop : Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$ -

Aff : $\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi a|\xi|}$

Def / Prop On définit les polynômes d'Hermite par : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n-\frac{1}{4}} \pi^{n/2} \sqrt{n!}} e^{2\pi x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-2\pi x^2}\right)$. Les fonctions d'Hermite sont définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x)$. Ces fonctions forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Thm (Bargmann) $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ se diagonalise en base d'Hermite au sens où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n h_n$ -

IV. INTÉGRATION NUMÉRIQUE - APPROXIMATION -

1. Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi = (\xi_i)$ tq $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

On définit $S(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$, $|\sigma| = \sup |x_{i-1} - x_i|$

Thm Si f est C^0_{pm}, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq si $|\sigma| < \alpha$ alors $\left\| \int_a^b f(x)\,dx - S(f) \right\| \leq \varepsilon$ -

Conséquence : Si $f \in C^0_{pm}$, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$

Ex : $I(\rho) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\,d\theta = 2\pi \log|\rho|$.

2. Intégration par quadrature en dimension 1.

Cadre : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable - $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ -

Déf (quadrature élémentaire) Pour $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ on définit la formule de quadrature élémentaire $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$

On dit que la quadrature est exacte à l'ordre r lorsque $I_n(f) = I(f)$ pour tout f polynôme de degré r -

Ex : (rectangles) $n = 0$ -

- à gauche : $\alpha_0 = b-a$, $x_0 = a$
- à droite : $\alpha_0 = b-a$, $x_0 = b$ -
- point milieu : $\alpha_0 = b-a$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ -

Prop : Les rectangles à gauche, droite sont d'ordre 0, les rectangles point milieu est d'ordre 1 -

Déf (quadrature composée) $m \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{b-a}{m}$. Pour $j \in \{0, \dots, m-1\}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha_k^{(j)} \in \mathbb{R}$, $x_k^{(j)} \in [a+jh, a+(j+1)h]$ - On définit :

$I_{n,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(j)} f(x_k^{(j)})$. $E_{n,m}(f) = I(f) - I_{n,m}$

méthode	ordre	$I_{n,m}(f)$	$E_{n,m}(f)$
rect. pt milieu	1	$h \sum_{k=0}^{m-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2} h\right)$	$\frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$
trapèze	1	$\frac{h}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$, $x_k = a + kh$	$-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$
Simpson	3	$\frac{h}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m})\right]$	$-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$

rem : Ces méthodes sont obtenues en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 0, 1 ou 2 -

GAUSS ?

3. Méthode de Monte-Carlo : cas peu régulier ou multi-dimensionnel.

Théorème (loi forte des grands nombres) - Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mesurable, $(X_n)_n$ une suite de var indépendante identiquement distribuée dans $\mathcal{X}$ - Alors

$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_i)}_{I_N(f)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} E[f(X_1)] = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)\,dx$ p.s.

rem : L'erreur $\left| I_N(f) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)\,dx \right|$ est donnée par la variance de $I_N(f)$, c'est un $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Leçon 239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Sans analyse de Fourier, la vie est assez triste.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cadre : $f : I \times X \to \mathbb{C}$ où X espace mesuré, I intervalle réel, telle que $\forall t \in I$ $x \in X \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur E.

I. THÉORÈMES DE RÉGULARITÉ

1. Les théorèmes de Lebesgue.

Thm (convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonctions $L^1(\Omega)$. On suppose que (a) $(f_n)_n$ CVS vers f (b) $\exists g \in L^1(\Omega)_+$ telle que, $\forall n$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pp. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Thm (Continuité) On suppose (a) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue (b) $\exists g$ intégrable sur X telle que $\forall t \in I$, $\forall$ pp $x \in X$, $|f(t,x)| \leq g(x)$. Alors $F : t \in I \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue.

C-ex (cas semi-convergent) : $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$ n'est pas C^0 en zéro (voir applis)

C-ex : $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \frac{1}{t}\exp\left(-\log\left(\frac{x}{t}\right)^2\right)$ si $xt \neq 0$, $f(0,x) = f(t,0) = 0$ est continue en t pour tout x mais $t \mapsto \int_0^1 f(t,x)\, dx$ n'est pas C^0.

Thm (dérivabilité) On suppose (a) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable (b) $\exists g \in L^1(X)$, $\forall t \in I$, $\forall$ pp $x \in X$, $|\partial_1 f(t,x)| \leq g(x)$. Alors $F : t \in I \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \partial_1 f(t,x)\, d\mu(x)$

C-ex : $f(t,x) = \frac{t^3}{x^2}\exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(t,0)$.

Rem : Pour les deux théorèmes précédents, des hypothèses locales sont suffisantes (domination sur tout compact de X).

App : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Rem : s'étend à la classe C^k.

2. Holomorphie

Cadre : On remplace I par U un ouvert de $\mathbb{C}$.

Thm On suppose (a) $\forall$ pp $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur U. (b) $\exists g \in L^1(X)$, $\forall z \in U$, $\forall$ pp $x \in X$, $|f(z,x)| \leq g(x)$. Alors $F : z \in U \mapsto \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$ est holomorphe et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\, d\mu(x)$

Ex : La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$

App : Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ et $\frac{1}{\Gamma} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$

App : La fonction $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie et holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et vérifie l'équation fonctionnelle : $\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$.

II. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Thm (intégration des relations de comparaison) Soient $[a,b[\subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, E un $\mathbb{R}$-ev de Banach, $f : [a,b[\to E$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ cpm sur $[a,b[$.

(i) Si $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge alors : $f \underset{x \to b^-}{=} O(g) \Rightarrow \int_a^x f(t)\, dt \underset{x \to b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t)\, dt\right)$ idem o et $\sim$.

(ii) Si $\int_a^b g(t)\, dt$ converge alors $f \underset{x \to b^-}{=} O(g) \Rightarrow \int_x^b f(t)\, dt \underset{x \to b^-}{=} O\left(\int_x^b g(t)\, dt\right)$ idem o et $\sim$.

Ex : $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1}\, dt\right) = o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Thm (méthode de Laplace) Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (borné ou non), $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^2 et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ L^1 telle que $F(x) = \int_a^b e^{x\varphi(t)} f(t)\, dt$ soit bien définie continue sur $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

(1) Si φ atteint un max ordinaire en un unique point $t_0 \in]a,b[$, i.e. $\varphi'(t_0), \varphi''(t_0) < 0$ et φ' ne s'annule qu'en t_0.
alors si $f(t_0) \neq 0$, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}}\frac{e^{x\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}$.

(2) Si φ atteint son maximum en a et φ' ne s'annule pas sur $]a,b[$
alors si $f(a) \neq 0$, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(a)}{-\varphi'(a)}\frac{e^{x\varphi(a)}}{x}$

App : $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{x+1} \times \sqrt{2\pi}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ (Stirling).

Thm (Phase stationnaire). Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^∞, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, C_c^∞. Alors $F(x) = \int_a^b e^{ix\varphi(t)} f(t)\,dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Si φ' s'annule en unique point $t_0 \in]a,b[$ avec $\varphi''(t_0) \neq 0$, $f(t_0) \neq 0$
alors $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(t_0)|}}\, e^{\operatorname{signe}(\varphi''(t_0))\, i\pi/4}\, \frac{e^{ix\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}$.

Ex.

III - OPÉRATEURS À NOYAU

Cadre : Soient X, Y des espaces mesurés. Si $K : X\times Y \to \mathbb{C}$, on étudie les opérateurs $\mathcal{K} : \mathcal{F}(X,\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$, de la forme $\mathcal{K}f(y) = \int_X K(x,y) f(x)\,d\mu(x)$

Thm (continuité) $\mathcal{K}$ est continue dans les cas suivants :
- $\mathcal{K} : L^1 \to L^\infty$ lorsque $K \in L^\infty(X\times Y)$
- $\mathcal{K} : L^\infty \to L^1$ lorsque $K \in L^1(X\times Y)$
- $\mathcal{K} : L^1 \to L^1$ lorsque $\sup_y \int_x |K(x,y)|\,d\mu(x) < \infty$
- $\mathcal{K} : L^2 \to L^2$ lorsque $K \in L^2(X\times Y)$.

Prop : Si X et Y sont compacts, $\mathcal{K} : L^1(X) \to C(Y)$ est un opérateur compact lorsque $K \in C(X\times Y)$.
Prop : $\mathcal{K} : C(X) \to C(Y)$ est compact lorsque K est continue.

IV. CONVOLUTION

1. Définition et propriétés

Déf/Prop Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \le p \le \infty$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on définit le produit de convolution $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$.
De plus $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.

Déf/prop (Young) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$. Alors $f*g$ est bien définie et $f*g \in L^r$ avec $\|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

Prop Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$.

2. Régularisation et applications

Déf (suite régularisante) C'est une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\gg1}$ t.q. : $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Supp}\rho_n \subset B(0,\frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$ et $\rho_n \ge 0$ sur $\mathbb{R}^d$

Prop. Si $f \in C(\mathbb{R}^d)$ alors $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $1 \le p < \infty$, alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

App : $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ ↙ Tietze-Urysohn
[⚠ Utilise la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$]

Aff : théorèmes de Weierstrass, de Fejer sur la densité des polynômes et polynômes trigonométriques -

Aff : thm de Riesz-Frechet-Kolmogorov sur les compacts de $L^p(\Omega)$.

IV. TRANSFORMATION DE FOURIER

1. Dans l'espace de Schwartz

Déf/Prop $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}$
C'est un espace métrique complet pour $d(f,g) = \sum 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}}$

Déf : Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit $\mathcal{F}u(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi} dx$ -

Prop : Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\partial^\alpha u)(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$.

Prop : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u \mapsto \hat{u}$ est continue -

Ex : Pour $\alpha > 0$, $\mathcal{F}(e^{-\alpha|\cdot|^2}) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\alpha}}$ (vrai pour $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$)

Thm (inversion) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie bijective d'inverse
$\mathcal{F}^* u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) e^{+2i\pi x\cdot\xi} d\xi$. Si $\langle\,\rangle$ est le ps de L^2 alors
$\langle \mathcal{F}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{F}^* v\rangle$ et $\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ -

2. Extension à L^1 et L^2

Thm : $\mathcal{F}$ s'étend de manière unique en une ~~isométrie~~ application C^0 $L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$
De plus si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}u \in L^1$ alors $u = \mathcal{F}^*\mathcal{F}u$.

Prop : Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(u*v) = \mathcal{F}(u)\cdot\mathcal{F}(v)$
Si $\mathcal{F}u, \mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v)$.

Thm $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ s'étendent de façon unique en des isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$

PIOCHER DANS 250 EN FONCTION DE LA PLACE.

3. Application à la résolution d'EDP : l'équation de Schrödinger linéaire

Prop : Si $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{F}u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S})$ et $\partial_t \mathcal{F}u = \mathcal{F}(\partial_t u)$

Prop : Le problème (S) $\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u(t,x), & t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$
a une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ donnée par -
$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 i t|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi)$ i.e. $u = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4i\pi^2 t|\cdot|^2} \hat{u_0}\right)$
$= \left(\frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi i t)^{d/2}} * u_0\right)(x)$

Rem : On peut utiliser le fait que $\mathcal{F}$ est une isométrie pour résoudre (S) dans $C^0(\mathbb{R}, H^s)$.

4. Dans un cadre probabiliste -

RESUMER 250 (ET 261)
↳ Déf, inversion, Lévy (au moins)

Leçon 241

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Il est sans doute intéressant de parler des théorèmes d'Egorov et de Lusin (cf. Dolecki).

Les probabilités c'est super, ça offre plein de nouvelles perspectives.

241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

I. GÉNÉRALITÉS ET PREMIERS EXEMPLES

1. Définitions, exemples et relations.

Cadre : X est un ensemble, (E,d) est un espace métrique, éventuellement normé auquel cas il sera noté $(E,\|\|)$. $(f_n)_n$ est une suite de fonctions $X \to E$.

Déf (convergence simple). On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f : X \to E$ lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

rem : C'est la convergence associée à la topologie produit sur E^X.

Ex : $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement vers $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.

Déf (convergence uniforme) On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : X \to E$ lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

rem : C'est la convergence associée à la topologie de l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions bornées $X \to (E,\|\|)$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$

Ex : $f_n : x \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Prop : Si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ alors $f_n \xrightarrow{CVS} f$

C-ex : $f_n : x \in [0,1[\to x^n$ ne converge pas uniformément vers 0 mais simplement

Prop (critère de Cauchy) : Lorsque (E,d) est complet, $(f_n)_n$ CVU vers f ssi

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall q \geq N$, $\forall x \in X$, $d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$.

rem : Si $(E,\|\|)$ est un espace de Banach, cela signifie que $(\mathcal{B}(X,E), \|\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Déf (série de fonctions). On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$ et on dit que la série CVS / CVU lorsque la suite $(S_n)_n$ CVS / CVU.

Déf (convergence normale). Lorsque $(E,\|\|)$ est un espace de Banach, on dit que la série converge normalement lorsque la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Ex : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement.

Prop : $\sum f_n$ CVN $\Rightarrow$ $\sum f_n$ CVU

C-ex :

2. Propriétés de la limite.

Ici (X,δ) est métrique.

Prop : La CVS préserve la croissance, la convexité, la k-lipschitzienneté.

Thm : On suppose que (X,δ) est un espace métrique. Si les $f_n : X \to E$ convergent uniformément (sur un voisinage de $x_0 \in E$) et sont continues en $x_0 \in E$ alors la limite f est continue en x_0.

C-ex : $x \in [0,1] \to x^n$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas C^0.

Prop (double limite) : On suppose que $f_n \xrightarrow{CVU} f$ au moins sur un voisinage de $a \in A$. On suppose qu'existe la limite $\lim_{x \to a} f_n(x) = l_n$.
Alors la limite $\lim_{n \to +\infty} l_n = l$ existe et $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

C-ex : $f_n(x) = \begin{cases} 1/n \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ CVU vers 0 (CVU ne préserve pas les mauvais comportements)

C-ex : $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ converge simplement vers 0 et on ne peut pas intervertir $\lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty}$ et $\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty}$.

Théorème (Banach) : On suppose $f_n : [a,b] \to (E,\|\|)$ C^1. On suppose que f_n' CVU vers g sur $[a,b]$ et pour $x_0 \in [a,b]$ $(f_n(x_0))_n$ converge.
Alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers f C^1 tq $f' = g$.

Coro : Si les f_n sont C^1, que $\sum f_n(x_0)$ CV et $\sum f_n'$ CVU alors $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Ex : $(E,\|\|)$ Banach algèbre, $u \in E$, $e_u : \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} u^n$ est C^∞

C-ex : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ CVU vers 0 mais $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ ne CV pas

C-ex :

II (RÉCIPROQUES PARTIELLES) - CRITÈRES - SOUS-SUITES -

Thm (Dini) Soit (K,δ) métrique compact $(f_n)_n$ suite de $C^0(K,\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est croissante et CVS vers une fonction f continue. Alors la CV est uniforme.

Ex : convergence de polynômes vers $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$. AVANT.

C-ex : ..

I - Extraction de sous-suites, critères de compacité

Thm (Helly) Une suite de fonctions croissantes $\mathbb{R}\to[0,1]$ admet une sous-suite qui CVS (vers une fonction croissante).

App : théorème de Prokhorov sur la compacité des suites de mesures tendues pour la CV en loi

Thm (Ascoli) - (K,δ) métrique compact, $(E,\|\|)$ Banach. L'ensemble des parties relativement compactes au sens de la norme uniforme sur $C(K,E)$ sont les parties équicontinues et bornées.

App : Le théorème de Cauchy-Peano sur l'existence de solution à un problème de Cauchy -

2. Régularisation

Déf (suite régularisante) C'est une suite $(\rho_n)_n$ tq $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\int_{B(0,1/n)^c} \rho_n = 1$ et $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Thm Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$

App : (Weierstrass) Les fonctions polynômiales sont denses pour $\|\cdot\|_\infty$ dans l'espace des fonctions continues.

Rem : on a une suite explicite donnée par les polynômes de Bernstein.

III - CALCUL INTÉGRAL

1 - Résultats généraux

Déf On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions définies pp sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tq $\int_\Omega |f|^p < \infty$ si $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty(\Omega)$, $\sup_\Omega |f| < \infty$.

Thm (Beppo-Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions L^1 positive. Alors $f_n(x)$ CV pp vers une limite finie $f(x)$ et $f \in L^1$ avec $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Thm (Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions L^1 positives. Alors $\int_\Omega \liminf_n f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$.

Thm (CVD) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions L^1 tq $f_n(x) \to f(x)$ pp et $\exists g \in L^1$ tq $\forall n$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pp. Alors $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$

Thm (Riesz-Fischer) $L^p(\Omega)$ est complet pour $1 \leq p < \infty$.

Thm Si $\|f_n - f\|_p \to 0$, il existe une sous-suite qui CV pp.

Ex -

C-ex.

Thm (Egorov) (X,μ) mesuré de mesure finie (f_n) suite de fonctions mesurables de $X \to \mathbb{R}$ qui CVS vers f. Alors il existe une ens A dont le complémentaire est arbitrairement petit sur lequel $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

App (théorème de Lusin) Une fonction mesurable est C^0 sur un ensemble dont le complémentaire est de mesure arbitrairement petite.

2. Le cas L^2 : l'exemple des séries de Fourier

Thm (Fejer) Les fonctions $e_n : x \mapsto e^{2i\pi nx}$ forment une base hilbertienne de $L^2(0,1)$

voir 246.

IV - SÉRIES ENTIÈRES - ANALYTICITÉ - HOLOMORPHIE -

1 - Série entières

Déf : Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série entière une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{K}$, $z \in A$.

Ex : exponentielle matricielle.

Dans la suite $A = \mathbb{C}$

Prop : Une série entière CVN sur tout ouvert du disque ouvert de convergence

Corollaire : Ces séries entières sont C^∞ et somme de leur série de Taylor.

On qualifie d'analytique de telles fonctions.

Théorème (Taubes, Abel etc)

voir 243 et 245 -

2. Holomorphie

Théorème : Toute fonction analytique est holomorphe et réciproquement.

Corollaire : Unicité du prolongement analytique -

Ex : La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe dans $\{Re s > 1\}$ -

Prolongement

V - CONVERGENCES PROBABILISTES -

1 - Def CV en $\mathbb{P}$

Déf (CV en proba) : Soit $x, (X_n)_n$ une suite variables aléatoires réelles on dit que (X_n) converge en probabilité vers X lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

Prop : Dans un espace de mesure finie, CV $L^1 \Rightarrow$ CV en proba et la réciproque est vraie lorsque la suite est est uniformément intégrable

Prop : CV ps $\Rightarrow$ CV en proba et réciproquement il existe une sous-suite qui CV ps -

Ex -

C-ex -

App (TCL)

2. CV en loi.

voir 262

3. Une construction du mouvement brownien -

Lemme (Borel-Cantelli)

voir 262 -

Leçon 243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Pour les problèmes de dénombrement, il y a tout ce qu'il faut comme exemples dans les *Oraux X-ENS*.

243 Convergence des séries entières, propriété de la somme. Exemples et applications.

I - LES SÉRIES ENTIÈRES : PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Définition 1 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z\in\mathbb{C}$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1 - Rayon de Convergence

Lemme 2 (Abel) Si $r\geq 0$, et si $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée, alors pour tout $\rho \in [0, r[$, $\sum |a_n \rho^n|$ converge.

Définition 3 (Rayon de convergence) $R_a := \sup\{r\geq 0,\ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ bornée}\} \in [0, +\infty]$.

Proposition 4 . Si $|z| < R_a$ $\sum a_n z^n$ converge absolument
. Si $|z| > R_a$ $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Remarque 5 Sur le cercle $|z| = R_a$, la situation est plus délicate. Voir après

Proposition 6 (Hadamard) $\frac{1}{R_a} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Proposition 7 (d'Alembert) $\frac{1}{R_a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ si la limite existe.

Exemple 8 :

Exemple 9 :

2 - Opérations élémentaires (GOU)

Proposition 10 (Somme). Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Si $c_n = a_n + b_n$, $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $R_c \geq \inf\{R_a, R_b\}$

Proposition 11 (Produit) Si $c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell$ (produit de Cauchy) $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \inf(R_a, R_b)$

Composition : [Carlan]

Inverse ?

II - RÉGULARITÉ DANS L'INTÉRIEUR DU DISQUE DE CONVERGENCE

1 - Dérivation et fonctions DSE.

Théorème 12 . Une série entière converge normalement (donc uniformément) sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.

Corollaire 13 $f : D_{R_a} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue.

Définition 14 : (Série dérivée) C'est la série $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 15 Une série entière et sa dérivée ont même rayon de convergence.

Théorème 16 . f est indéfiniment dérivable sur le disque ouvert de convergence. De plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Théorème 17 (unicité). unicité du DSE

2- Variable réelle

C^∞ $\not\Rightarrow$ analytique [Zav]

Thm (Borel) densité des fonctions C^∞ analytiques nulle part dans C^∞ pour la topo de la CVU de toutes les dérivées

C-ex : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{n!^n}$ C^∞ analytique nulle part [John] -

3- Fonctions analytique, holomorphes

Définition (fonction analytique) - $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur un ouvert Ω lorsque $\forall z_0 \in \Omega$, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r>0$ tq $\begin{cases} B_0(z_0, r) \subset \Omega \\ \forall z \in B_f(z_0, r), \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \end{cases}$.

Théorème - Holomorphe $\Leftrightarrow$ analytique -

Théorème Principe des zéros isolés - Cqq : prolongement -

Théorème - formule de Cauchy, inégalités de Cauchy -

Théorème Liouville -

4- Intégration -

Théorème : Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $R_a > 0$ -
Si $x \in]-R_a, R_a[$, $\int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

III- CALCULS, SÉRIES ENTIÈRES CLASSIQUES

1- Développement en série entière usuels

- $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
le rayon de convergence est infini

- $\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots$
le rayon de convergence est 1 -

2- Développement en série entière des fractions rationnelles

Proposition : Une fraction rationnelle $F = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ est DSE de rayon de CV $R_F = \min\{|a_i|\}$ où a_i pôles de F

Méthode : On décompose F en éléments simples

Méthode : On a $P = QF$ et on en déduit les coef par récurrence

3- Utilisation d'une équation différentielle

Méthode : Si f est DSE, on cherche une équation différentielle satisfaite par f et on identifie les coefficients -

Exemple : $f(x) = (\text{Arctan } x)^2$

Exemple : On utilise l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz pour retrouver $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$ -

IV - COMPORTEMENT AU BORD DU DISQUE DE CONVERGENCE

1. Tout ne se passe pas bien - [Hauchecorne]

Exemple : $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de CV 1 et diverge sur tout le cercle (car $|z^n|=1$).

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de CV 1 et converge sur tout le cercle.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de CV 1, diverge pour $z=1$, converge pour $z=-1$.

2. Théorème d'Abel angulaire [Gourdon, OA]

Théorème. Soient $\sum a_n z^n$ de rayon de CV 1, de somme f, un réel $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et le secteur angulaire Δ_{θ_0} :



Si $\sum a_n$ CV alors $f(z) \xrightarrow[z\in\Delta_{\theta_0}]{z\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Application quand $a_n \geq 0$: [OA]

3. Réciproques partielles

Théorème (taubérien faible). Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de CV 1 et f sa somme.
On suppose $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$.
Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

Thm (taubérien fort)

V. QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION.

1. Problèmes combinatoires

Nombre de dérangements.

2. En probabilités.

Définition (série génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$)
[Candelpergher]

3. Equations différentielles

4. Le Problème de Dirichlet, la somme au sens d'Abel, séries de Fourier

(Candelpergher)

Théorème (Abel). Si f est 1-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $(0,1)$
alors $f_r(x) = \sum c_n(f) e^{2i\pi nx} r^{|n|} = (P_r * f)(x)$ où $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi x + r^2}$
De plus $\lim_{r\to 1} (P_r * f)(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue
+ CVU si C^0 et CV C^1.

Théorème : On peut identifier les fonctions f périodiques C^0 tq $c_n(f)=0$ et les fonctions $\tilde{f}$ analytiques sur $D(0,1)$ qui se prolongent C^0 sur $\overline{D}(0,1)$.

D'où fournit une solution explicite au pb de Dirichlet.

Leçon 245

Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Cette leçon est très largement recopiée sur le livre de Remmert, *Theory of Complex Functions*. Le plan est assez classique je pense : dérivation complexe et intégration sur des chemins donnent la formule de Cauchy à partir de laquelle on fait le lien avec les fonctions analytiques.

Pour finir, j'ai essayé de parler de convergence de suites de fonctions holomorphes (Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*) et des fonctions harmoniques (Cartan et Candelpergher, *Calcul Intégral*) en faisant un lien qui me semble joli avec les séries de Fourier.

245. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

[Rammert]

Cadre : Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I- DIFFÉRENTIABILITÉ AU SENS COMPLEXE.

1- Définitions.

Déf : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable au sens complexe en $z \in \Omega$ lorsque $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe. Lorsque c'est le cas pour tout point $z \in \Omega$, on dit que f est holomorphe sur Ω on note $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f' : z \mapsto f'(z)$ l'application dérivée.

Exemples : les polynômes, les séries entières dans le disque ouvert de convergence sont holomorphe.

C-ex : $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

Prop : $\mathcal{O}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et les règles usuelles de somme, produit, composition sont vraies.

2- Lien avec la $\mathbb{R}$-différentiabilité. Équations de Cauchy-Riemann

Prop : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors $f = u + iv$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann
(i) $\partial_x u = \partial_y v$ (ii) $\partial_y u = -\partial_x v$.

Thm : Il y a équivalence entre :
(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (ii) $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est diff. au sens réel et vérifie les équations de CR
(iii) f est $\mathbb{R}$-différentiable en tout point et la différentielle est une homothétie

Ex et App.

II- INTÉGRATION COMPLEXE. LA THÉORIE DE CAUCHY.

1- Chemins.

C^0 et C^1_{pm}

Déf : On appelle chemin une app $\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1. On note $|\gamma|$ l'image $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

Déf : Si f est continue sur $|\gamma|$, alors $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f \circ \gamma(t)\, \gamma'(t)\, dt$.

Prop : S'il existe un C^1-difféo φ tq $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ alors $\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$.

Ex : $\int_{C(c,r)} (\zeta - c)^n\, d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$ **Ex** : $\int_{C(c,1)^+} \frac{d\zeta}{\zeta - c} = \pi i$ et $\int_{C(c,1)^-} \frac{d\zeta}{\zeta - c} = -\pi i$

2- Intégration des fonctions holomorphes, primitivation.

Théorème : Soit f une fonction continue sur Ω. Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$. Il y a équivalence de Ω
(i) $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $F' = f$ (ii) Pour tous $w, z \in \Omega$ et pour tout chemin Ω joignant w à z, $\int_\gamma f\,dz = F(z) - F(w)$.

App : Si $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $F' = 0$ sur Ω alors F est localement constante.

Thm : Si Ω est étoilé en z_1, alors si $f \in C(\Omega)$ vérifie $\int_\Delta f\,d\zeta = 0$ pour tout triangle inclus dans Ω avec z_1 pour sommet, alors f possède une primitive F et $F(z) = \int_{[z_1,z]} f\,d\zeta$, $z \in \Omega$.
(on dit que f est intégrable)

Théorème (Goursat) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ Alors pour tout triangle ΔCD, $\int_{\partial\Delta} f\,d\zeta = 0$. App : intégrale de Fresnel

3- Le théorème de Cauchy

Théorème (Cauchy) Soit Ω un ouvert étoilé centré en c et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. f admet une primitive. En particulier, pour tout chemin fermé γ, $\int_\gamma f\,d\zeta = 0$.

Théorème (formule de Cauchy). Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors pour tout chemin γ fermé, $\mathrm{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ $z \in \Omega \setminus |\gamma|$.

↳ cas d'un disque + propriété de la moyenne.

Théorème (Cauchy-Taylor) holomorphe ⇒ analytique (à définir...)

Théorème (Morera). localement intégrable ⇒ holomorphe.

III. THÉORÈMES FONDAMENTAUX

1. Zéros des fonctions holomorphes.

Thm Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω étoilé. Il y a équivalence entre :
(i) $f = g$ (ii) $\{\omega \in \Omega, f(\omega) = g(\omega)\}$ a un point d'accumulation
(iii) $\exists c \in \Omega, f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Aff : Les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés.

App : Il y a toujours un point singulier sur le bord du disque de convergence d'une série entière.

Thm. Soit $\overline{D}(c,r) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $\min_{z \in C(c,r)} |f(z)| > |f(c)|$
Alors f a un zéro dans $D(c,r)$.

App : Une fonction holomorphe est une application ouverte.

2. Propriétés de bornitude.

Thm (inégalités de Cauchy). Soit f holomorphe dans un voisinage de $\overline{B}(c,r)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in B(c,r), \quad |f^{(k)}(z)| \leq k! \frac{r}{\min_{\xi \in \partial B} |\xi - z|} \|f\|_{\infty, \partial B}.$$

Thm (Principe du maximum). Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq f a un maximum local dans G. Alors f est constante sur Ω.

Thm : (Liouville) Une fonction $H(\mathbb{C})$ (entière) et bornée est constante

App : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

App (Müntz) : Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite de réels > 0 qui tend vers $+\infty$.
Il y a équivalence entre : (i) La famille $t \mapsto t^{\lambda_j}$ engendre une famille génératrice de $(C([0,1]), \|\|_\infty)$ (ii) $\sum \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$.

3. Fonctions méromorphes - singularités.

Déf : Si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{c\}$ on dit que c est une singularité isolée
* c est une singularité effaçable si f se prolonge holomorphiquement sur Ω.
* c est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si $(z-c)^m f(z)$ définit une fonction holomorphe sur Ω
* c est une singularité essentielle dans le cas contraire.

Thm. Dans chacun des cas ci-dessus on a :
* Si f est bornée sur $U \setminus \{c\}$ où U est un voisinage de c alors c est une singularité effaçable
* Si c est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}$, $\exists b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, $b_m \neq 0$, $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{(z-c)^i} + \tilde{f}(z)$.
* (Casorati-Weierstrass) c est une singularité essentielle ssi pour tout vois. U de c, $f(U \setminus c)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Déf : Une fonction f est dite méromorphe sur Ω lorsqu'elle est holomorphe sur $\Omega \setminus P(f)$ où $P(f)$ est un ensemble discret de Ω tel que f a un pôle en chaque point de $P(f)$

Déf : Si c est un pôle de f, on appelle résidu de f en c le coefficient b_1 dans le thm.

Prop : Si c est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to c} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-c)^m f(z) \right)$

Thm (résidus) Soit γ un lacet fermé dans un ouvert connexe Ω. Si h est holomorphe sur $\Omega \setminus A$ où A sous-ensemble fini de $\Omega \setminus \gamma$ alors :

$$\int_\gamma h \, d\gamma = 2i\pi \sum_{c \in \mathrm{Int}\gamma} \mathrm{Ind}_\gamma(c) \cdot \mathrm{Res}_c(h).$$

App : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors le nombre de zéros de f dans $C(c,r)$ est $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

App : Calcul d'intégrales.

IV - SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS HOLOMORPHES -

1 - Topologie de la CVU sur tout compact - (Cartan)

Théorème (Weierstrass) - La limite d'une suite de fonction $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui CVU sur tout compact est holomorphe et les dérivées CVU sur tout compact -

Prop : La topologie de la CVU sur tout compact est métrisable.

Théorème (Montel) Les compacts de $\mathcal{O}(\Omega)$ pour cette topologie sont les fermés bornés (ou borné signifie "borné sur tout compact $\subset\Omega$") -

2 - Prolongement des fonctions Γ et ζ. [Candelpergher], [ZQ]

Déf : On définit les fonctions $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$ et $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ qui sont holomorphes respectivement dans $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ et $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$

Déf : Soit (f_n) une suite de fonctions continues dans Ω - On dit que le produit infini $\prod f_n$ CVN sur un compact K lorsque la série $\sum \log f_n$ CVN sur K. Dans le cas où il y a CVN sur tout compact $\subset\Omega$, la limite $\prod_{n=1}^{\infty} f_n = \exp(\sum \log f_n)$ est holomorphe.

Théorème : La fonction Γ est prolongeable analytiquement à $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ via la formule $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{z}{n}} e^{z/n}$

Théorème La fonction ζ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et vérifie

$$\pi^{-s/2}\,\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-(1-s)/2}\,\zeta(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

V - FONCTIONS HARMONIQUES. PROBLÈME DE DIRICHLET -

1 - Fonctions harmoniques - Fonctions holomorphes [Cartan]

Déf : Une fonction $f(x,y)$ des deux variables réelles x et y définie dans un ouvert Ω est dite harmonique dans Ω lorsqu'elle est C^2 et $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial \bar z} = 0$.

Prop : Toute fonction holomorphe est harmonique.

Ex : $\log|z|$ est harmonique - Les parties Re et Im des fonctions holo sont harm

Prop Toute fonction réelle $g(x,y)$ harmonique dans Ω est localement la partie d'une fonction f holo au voisinage, déterminée à l'addition d'une constante près -

Propriétés : Toute fonction harmonique est analytique et vérifie la propriété de la moyenne et le principe du maximum

2 - Le problème de Dirichlet [Candelpergher] -

Pb : Soit f une fonction continue sur le cercle $\mathcal{C}(0,1)$ Trouver une fonction $F(z)$ C^0 dans $\overline{D}(0,r)$, harmonique dans $D(0,1)$ et tq $F(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Déf (Abel) Une série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ est Abel sommable lorsque $\lim_{r\to 1} \sum r^{|n|} u_n$ existe. On note $\sum_{\text{Abel}} u_n = \lim_{r\to 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} u_n$.

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 1-périodique et intégrable sur $]0,1[$. On note $c_n(f)$ son n-ème coefficient de Fourier, $n\in\mathbb{Z}$.

(i) $\sum_{\text{Abel}} c_n(f) e^{2i\pi nx} = \lim_{r\to 1} (P_r * f)(x) = f(x)$ en tout point où f est continue et où $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2i\pi nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi x)+r^2}$

(ii) Si f est continue sur $\mathbb{R}$, la convergence est uniforme -

Prop : Si $\tilde f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est analytique dans $D(0,1)$ et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{D}(0,1)$ alors $f(x) = \tilde f(e^{2i\pi x})$ est 1-périodique, C^0 et ses coefficients de Fourier d'indice <0 sont tous nuls. De plus :

$$f(x) = \sum_{\text{Abel}} a_n e^{2i\pi nx}$$

Prop : Si f est une fonction C^0 sur $\mathcal{C}(0,1)$, (1-pér.) tq $c_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$ Alors $f(x) = \lim_{r\to 1} \tilde f(re^{2i\pi x})$ où $\tilde f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) z^n$ dans $D(0,1)$

Théorème : Le problème de Dirichlet $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ dans } D(0,1) \\ v = \nu \text{ sur } \mathcal{C}(0,1) \end{cases}$ a une unique solution donnée par : $v(re^{2i\pi x}) = \mathrm{Re}\, \tilde f(re^{2i\pi x}) = \int_0^1 \nu(e^{2i\pi y}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi(x-y)+r^2}\,dy$ où $\tilde f(x) = \nu(e^{2i\pi x})$ et $c_{-n}(f) = 0$ $n \geq 1$,

Corollaire Toute fonction continue dans un ouvert Ω possédant la propriété de la moyenne dans Ω est harmonique dans Ω.

Leçon 246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

Candelpergher !

[Candelpergher] pla
[Willem] exemples.

246 - Séries de Fourier
Exemples et applications

Cadre : f fonction 1-périodique : on considère sa restriction à $[0,1]$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto e^{2i\pi n x}$

I. THÉORIE HILBERTIENNE - CONVERGENCE L^2.

Théorème : Les fonctions $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Déf : On appelle n-ième coef de Fourier de f la quantité
$$\langle e_n, f \rangle = \int_{(0,1)} f(t) e^{-2i\pi n t}\, dt.$$

Corollaire : La suite $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ converge dans L^2 vers f. On note dans ce cas :
$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n.$$

Thm (Parseval) : $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $\|f\|_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Thm (isomorphisme) : $\mathcal{F} : L^2(0,1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))$ est un isomorphisme isométrique.

II. CONVERGENCE PONCTUELLE

1 - Propriétés des coef de Fourier d'une fonction intégrable.

Def Si $f \in L^1(0,1)$ on définit $c_n(f) = \int_{(0,1)} f(t) e^{-2i\pi n t}\, dt$.

Prop (Riemann-Lebesgue) $c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(injectivité). Deux fonctions $L^1(0,1)$ qui ont les mêmes coeffs de Fourier sont égales pp.

Déf (coeff réels) On a $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(f)\cos(2\pi n x) + \sum_{n=0}^{N} b_n(f)\sin(2\pi n x)$

où $a_0(f) = c_0(f)$

$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 2\int_{(0,1)} f(x)\cos(2\pi n x)\, dx$

$b_n(f) = 2\int_{(0,1)} \sin(2\pi n x) f(x)\, dx$.

Prop : Si f paire alors $\forall n$, $b_n(f) = 0$.

C-ex : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos(2\pi 2^n x) \in L^2(0,1)$.

La série de Fourier de f diverge en tout point de la forme $x_0 = \frac{j}{2^k}$.

Thm : Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ alors $S_N(f)$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ 1-périodique alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Ex : Calcul de $\zeta(2)$.

2 - Noyau et thm de Dirichlet

Déf : $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2i\pi n x} = \begin{cases} \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ (2N+1) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Prop : D_N est pair, 1-périodique et $\int_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} D_N(x)\, dx = 1$.

Prop : $S_N(f) = D_N * f$

Thm (Dirichlet) : Si $f \in C^1_{pm}$ 1-périodique alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
$$S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$
est la CV est uniforme sur tout intervalle fermé où f est C^0

C-ex (phénomène de Gibbs) $f = \begin{cases} 1/4 & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ -\frac{1}{4} & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$



$S(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)2\pi x)}{(2n+1)\pi}$. Si $x_N = \frac{1}{4N+4}$, $S_N(f)(x_N) \not\to 0$.

3- Régularité, convolution -

Il s'agit d'étudier $\mathcal{F} : L^1(0,1) \to c_0(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_n$ qui est linéaire continue -

C-ex : $\mathcal{F}$ n'est pas surjective (thm de l'inverse continu).

Prop : $c_n(f*g) = c_n(f)\, c_n(g)$.

Prop : Si $f \in C^k(\mathbb{R})$, $|c_n(f)| \leq \frac{c^{te}}{|n|^k}$, $c_n(f^{(k)}) = (-2i\pi n)^k c_n(f)$

Prop : Si $f \in C_{per}(\mathbb{R})$ avec $|c_n(f)| \leq \frac{c^{te}}{|n|^k}$ alors $f \in C^{k-2}_{per}(\mathbb{R})$.

Prop : $\mathcal{F} : C^\infty_{per}(\mathbb{R}) \to s(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme où $s(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites $(c_n)_n$ tq $c_n = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ pour tout $k \geq 0$ -

III - AUTRES PROCÉDÉS DE SOMMATION -

1 - Le noyau et le thm de fejer

Déf $F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{\sin^2(\pi(n+1)x)}{(n+1)\sin^2(\pi x)}$.

Prop : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n * f(x)$ converge vers la limite au sens de Césaro de $S_N(f)(x)$ -

Prop : Le noyau de fejer est une approximation de l'unité

C-ex : c'est pas le cas pour $(D_N)_n$

Thm (Fejer) Soit $f \in L^1(0,1)$ 1-périodique :

(1) En tout point où f est continue, $\lim_{n\to+\infty} (F_n * f)(x) = f(x)$

(2) Si f est continue, alors la CV est uniforme -

(3) $\|F_n * f - f\|_{L^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Rem : On retrouve l'injectivité de $\mathcal{F}$ et le thm de Weierstrass.

Thm (caractérisation) - Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$ une série trigo dont on notes S_n les sommes partielles et σ_n les moyennes de Césaro.

- La série $\sum c_n e^{2i\pi nx}$ est la série de fourier d'une fonction $f \in L^1(0,1)$ ssi $(\sigma_n)_n$ CV dans $L^1(0,1)$ -
- La série est la série de fourier d'une fonction continue ssi $(\sigma_n)_n$ CVU sur $(0,1)$ -

2 - Sommation au sens d'Abel, application au problème de Dirichlet

voir 245 -

IV - APPLICATION À L'ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR DANS UN CERCLE

1 - Théorie -

2 - Schéma aux différences finies -

Leçon 250

Transformation de Fourier. Applications.

C'est la leçon du bonheur.

L'essentiel des propriétés de la transformée de Fourier sont reprises de Rauch, *Partial Differential Equations* et sur L^2, le *Calcul Intégral* de Candelpergher contient comme d'habitude plein de trucs abordables (Heisenberg, Paley-Wiener, Bargmann...).

Il m'a semblé plus pertinent d'introduire la transformée de Fourier comme isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ qui est le bon espace pivot pour aller vers L^1, L^2 ou $\mathscr{S}'$.

En probabilité on utilise aussi la transformée de Fourier mais on l'appelle fonction caractéristique. C'est trop super grâce au théorème de Lévy.

250. Transformée de Fourier - Applications.

I - Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

1 - Définitions et exemples [Rauch], [Linares-Ponco], [Candelpergher].

Déf (espace de Schwartz). $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}$

Ex : $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mais $\frac{1}{(1+|x|^2)^N} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Prop (topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). (1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrisable :

$d(f,g) = \sum 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}}$ où $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|$.

et $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ssi $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$.

(2) $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ est complet (3) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Déf (transformée de Fourier). Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, selon le contexte, on définit :

$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi} dx$ [ou $\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\xi} dx$]

Propriétés - La transformée de Fourier vérifie pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

(i) $\mathcal{F}(\partial^\alpha u)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$

(ii) $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u \mapsto \hat{u}$ est continue.

(iii) $\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^\alpha u](\xi)$.

(iv) Si τ_h désigne la translation par $h \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}[\tau_h u](\xi) = e^{-2i\pi h\cdot\xi} \hat{u}(\xi)$

(v) Si σ_h désigne la dilatation par $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}[\sigma_h u](\xi) = \lambda^{-d} \hat{u}(\lambda^{-1}\xi)$

App : Pour $\alpha > 0$, $\mathcal{F}(e^{-\alpha|\cdot|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}$

App : La formule reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

2 - Convolution, régularisation et transformée de Fourier. [Brézis], [Rauch]

Déf (convolution). Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est définie pp en x et intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

On pose $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ et on a $f*g \in L^p$ avec $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$

Prop. (1) Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$

(2) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Déf (suite régularisante). On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_n$ t.q. :

(i) $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (ii) $\mathrm{Supp}\,\rho_n \subset B(0,\frac{1}{n})$ (iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$ (iv) $\rho_n \ge 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Thm (régularisation). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. Alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

App : $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

App : Le théorème de Fejer sur les séries de Fourier.

Théorème (inversion). $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie bijective d'inverse : $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}^* u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) e^{+2i\pi x\xi} d\xi$.

Si $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $\langle \mathcal{F}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{F}^* v\rangle$ pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3 - Applications aux EDP d'évolution : cas régulier. [Candelpergher], [Rauch], [Linares Ponce]

Thm (chaleur). La fonction $v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)dy$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) = \partial^2_{xx} v(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \lim_{t\to 0} v(t,x) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

v est C^1 en temps et $v(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$.

C-ex (unicité). $v(t,x) = \begin{cases} \frac{x}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est aussi solution avec donnée initiale nulle

Prop : Si $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{F}u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S})$ et $\partial_t \mathcal{F}u = \mathcal{F}[\partial_t u]$

Prop (Schrödinger) : Le problème (S) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) = i\Delta u(t,x), & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$

a une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ donnée par :

$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 i t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$ On définit $e^{it\Delta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u_0 \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 i t|\xi|^2} \hat{u}_0)$

II - LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS L^1 ET DANS L^2

Thm (prolongement) Soit (X,d_1) et (Y,d_2) des espaces métriques, Y complets. Soit $T : A \to Y$ une application linéaire continue sur $A \subset X$ une partie dense. Alors T se prolonge de manière unique en une app lin continue $T : X \to Y$.

1 - Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. [Rauch]

Thm : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s'étend de manière unique en une isométrie linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ où $C_0(\mathbb{R}^d) = \{u \in C(\mathbb{R}^d), \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\}$

De plus si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi} dx$.

Thm (inversion). Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $v := \mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $u = \mathcal{F}^* v$.

Ex : $d=1$, $u = \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$ $\mathcal{F}u(\xi) = -\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Aff : Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi,\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est C^0.

Prop : Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(u*v) = \mathcal{F}(u)\cdot\mathcal{F}(v)$ et si $uv \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}u, \mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}u * \mathcal{F}v$.

2 - Dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ [Rauch], [Candelpergher]

Thm : Les applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s'étendent de façon unique en des isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = id$.

Rem : Si $u \in L^1 \cap L^2$ les définitions coïncident toutes.

Déf/Prop (Hermite) : On définit les polynômes d'Hermite par :

$H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1/4}\pi^{n/2}\sqrt{n!}} e^{2\pi x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-2\pi x^2}\right)$

Les fonctions d'Hermite sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x)$.

Ces fonctions forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

Théorème (Bargmann). $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ se diagonalise en base d'Hermite au sens où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n h_n$.

3 - Propriétés de régularité et de support - [Candelpergher]

Théorème (Heisenberg). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\|f\|_{L^2} = 1$. On définit :

$V(f) = \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |f|^2 dx$ pour $x_0 = \int_{\mathbb{R}} x|f|^2 dx$

Alors $V(f)\,V(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}$.

Ex : Soit $f = x \mapsto \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$, alors $x_0 = \xi_0 = 0$ et $V(f)\,V(\hat{f}) = \frac{1}{16\pi^2}$.

Théorème (Shannon). Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Supp}\hat{f} \subset [-\nu, \nu]$. Alors si $\nu_e \geq 2\nu$, on a l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$:

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\,\operatorname{sinc}(\pi\nu_e(t - nT_e))$ où $T_e = \frac{1}{\nu_e}$.

Prop : Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier se prolonge analytiquement sur tout $\mathbb{C}$ par la formule $\mathcal{F}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-2i\pi z x)dx$.

Corollaire : Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{F}f \notin \mathcal{D}(\Omega)$.

Théorème (Paley-Wiener). Soit f continue et dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $M > 0$.

$[f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\operatorname{Supp} f \subset [-M,M]] \Leftrightarrow [\mathcal{F}(f)$ se prolonge analytiquement dans tout $\mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists C_n$ avec $\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, $|\mathcal{F}(f)(z)| \leq C_n \frac{1}{|z|^n} e^{2\pi M|\operatorname{Im} z|}]$

III - TRANSFORMÉE DE FOURIER ET DISTRIBUTIONS

1 - Distributions tempérées - [Candelpergher], [Rauch]

Déf : Une distribution tempérée est une forme linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq n} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

Déf : $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$

Déf : Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par :

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$.

Exemples $\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = e^{-2i\pi x_0 \cdot}$ et $\mathcal{F}[e^{2i\pi x_0 \cdot}] = \delta_{x_0}$

Ex : Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors les définitions coïncident.

Aff : Si f est 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et dans $L^1(0,1)$, alors $\mathcal{F}[f] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\delta_n$ où $c_n(f) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi n x}\, dx$.

Ex : $\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right) = -i\pi\,\mathrm{signe}$.

Aff : L'équation $(1-\Delta)u = f$ où $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par $\hat{u} = (1+|\xi|^2)^{-1}\hat{f}$. De plus si $f \in L^2$, pour tout $|\alpha| \le 2$, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$

2. Espaces de Sobolev H^s, $s \in \mathbb{R}$ [Linares-Pon 6], [Rauch]

Def : Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit $H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ muni de la norme $\|u\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

Ex : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ssi $s < -\frac{d}{2}$.

Propriétés : (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ (ii) $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace d'Hilbert (iii) si $k \in \mathbb{N}^*$, $u \in H^k(\mathbb{R}^d) \iff u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\forall |\alpha| \le k$, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (au sens distributions)

3. Application à l'équation de Schrödinger [Rauch]

Prop (i) $e^{it\Delta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^d)$

(ii) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i(t_1+t_2)\Delta} = e^{it_1\Delta}e^{it_2\Delta}$ (iii) Pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $t \mapsto e^{it\Delta}f \in C^0(\mathbb{R}, H^s)$

App : Pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, le problème (S) admet une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}, H^s)$ donnée par $u = e^{it\Delta}u_0 = \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi i t)^{d/2}} * u_0$.

IV - LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS UN CADRE PROBABILISTE.

1. Définition et premières propriétés [Walsh], [Billingsley], [Durrett]

Def : Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On définit sa transformée de Fourier ou fonction caractéristique : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x)$. Si X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}_X = \mu$, alors $\varphi_X(t) = \varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Rem : Si μ a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, φ est la transformée de Fourier de f au sens des paragraphes précédents.

Propriétés : (i) $\varphi(0) = 1$ (ii) $|\varphi(t)| \le 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (iii) φ est uniformément continue (iv) Si X admet un moment d'ordre k, φ est k-fois diff et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbb{E}(X^j)}{j!}(it)^j + o(t^k)$ (v) Si $\varphi^{(2k)}(0) < \infty$ alors $\mathbb{E}(|X|^{2k}) < \infty$

Exemples (i) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ (ii) $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$.

(iii) $X \sim$ Cauchy, $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$

Théorème (inversion) : Si $a < b$ alors la limite suivante existe :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}).$$

Corollaire : La fonction caractéristique caractérise la loi.

Corollaire : Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ alors μ admet une densité continue et bornée : $f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi(t)\,dt$

2. Fonction caractéristiques. lois et convolution probabiliste.

Prop : Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, $\mathbb{P}_{X_1+X_2} = \mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}$

Prop : Soient $X_1, \dots, X_n$ des var indépendantes et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ leurs fonctions caractéristiques alors $\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \varphi_1(t)\cdots\varphi_n(t)$

Théorème (Prokhorov) : Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ tendue i.e. telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n([-M,M]^c) < \varepsilon$ Alors il existe une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ et une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$.

Théorème (Lévy) : Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ et (φ_n) les fonctions caract. Si (a) $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers φ_∞ (b) φ_∞ est continue en $t=0$. Alors (i) $\exists$ une mesure de proba μ_∞ tq $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ (ii) φ_∞ est la fonction caractéristique de μ_∞

App : le théorème Central limite.

3. Dériver la fonction caractéristique : problèmes de moments.

Théorème (Hamburger) : Soit $(\alpha_k)_k$ une suite de réels tq $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\alpha_{2k}^{1/2k}}{2k} < \infty$ Alors il existe au plus une mesure de probabilité dont les moments sont les α_k.

Aff : la loi normale est caractérisée par ses moments.

C-ex : la loi log-normale de densité $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-1}\exp\left(-\frac{(\log x)^2}{2}\right)$ ne l'est pas.

Théorème : Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité telle que les μ_n admettent des moments de tous ordres (α_n^k) avec $\alpha_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha^k$ Si la suite $(\alpha^k)_k$ vérifie la condition du thm de Hamburger, alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ où μ est l'unique mesure de probabilité dont les moments sont les α^k.

App : [Billingsley].

Leçon 253

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il vaut sûrement mieux oublier tout ce qu'il y a sur la convexité en dimension infinie (ou garder juste Hahn-Banach) ou l'uniforme convexité (enfin c'est quand même intéressant, voir Brézis). Du coup presque toute la leçon est dans un des livres de Hirriart-Urruty et Lemaréchal et on peut reprendre les algorithmes de minimisation dans le livre de P. Ciarlet.

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ET FONCTIONS CONVEXES.

1- Ensembles convexes.

Déf: Une partie C d'un ev E est convexe lorsque pour tous $(x,y)\in C^2$, $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$.

Ex: sous-espaces, les intervalles de $\mathbb{R}$.

Prop: La convexité est une notion stable par intersection quelconque, par somme de Minkowski et par produit cartésien. - Passage à l'intérieur et adhérence -

Déf (enveloppe convexe): Soit $S \subset E$. On note $co(S)$ l'intersection des parties convexes contenant S. C'est le plus petit convexe de E contenant S.

Exemple: - L'enveloppe convexe d'une base est un simplexe.
- théorème de Gauss-Lucas.

Théorème (Carathéodory): Si $E=\mathbb{R}^n$, $x \in co(S)$ peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de S.

Corollaire: L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

App: théorème de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL(E)$.

C-ex: $\overline{co(S)} \neq co(\bar{S})$ mais vrai si S borné.

2- Fonctions convexes.

Déf: Soit $C \subset E$ une partie convexe et $f: C \to \mathbb{R}$. f est dite convexe lorsque $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

- f est dite strict convexe lorsque $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in]0,1[$, $x \neq y$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- f est dite fortement convexe lors $\exists \alpha > 0$, $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$ $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2$ (f α-convexe)

Prop: α convexe $\Rightarrow$ strict-convexe $\Rightarrow$ convexe.

Ex:

Propriétés (régularités des fonctions convexes)

- C^0 dans l'intérieur et lc local lipschitz.
- Si f diff f convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in C$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$
- Si f 2 fois diff. :

Prop: épigraphe.

3- inégalités classiques.

Prop: (arithmético-géométrique) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ et généralisation.

Prop (Hölder)

App: Minkowski : les L^p sont des evn.

Prop (Jensen)

App: en proba.

II. PARTIES CONVEXES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ OU PLUS

1- Théorèmes de point fixe

Théorème (Brouwer) Tout app continue d'un convexe compact non vide C d'un espace euclidien à valeurs dans C admet un point fixe.

Théorème (Schauder) Toute application continue d'un convexe compact non vide K d'un espace de Banach à valeurs dans K admet un point fixe.

App : Théorème de Cauchy-Peano.

2. Dans un espace de Hilbert

Cadre : $(E, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Théorème (projection). Soit C un convexe fermé de E. Alors il existe une unique application $p_C : E \to C$ tel que pour $x \in E$:

(i) $d(x, C) = \|x - p_C(x)\|$

(i) $y = p_C(x) \Leftrightarrow \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \leq 0$.

App : Lorsque C est un sev fermé

App : Théorème de Riesz

App : Espérance conditionnelle.

App : séparation des convexes.

App : théorème de Krein-Milman en dimension finie.

3. Le théorème de Hahn-Banach.

Théorème Soit E un $\mathbb{R}$-evn. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ii) $\forall x, y \in E,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Soit $F \subset E$ un sev et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in F,\ \varphi(x) \leq p(x)$.

Alors φ admet un unique prolongement à E dominé par p.

Corollaire : Prolongement des formes linéaires continues avec la même norme.

App : Critère de densité et caractérisation de la norme par dualité

Def : La jauge d'un convexe $C \subset E$ est la fonction

$p_C(x) = \inf\{r > 0,\ \frac{x}{r} \in C\}$ où on suppose $0 \in C$.

Prop : p_C vérifie les hypothèses du théorème de Hahn-Banach

App : théorème de séparation en dim infinie.

App : théorème de Krein-Milman en dimension infinie.

4. Uniforme convexité ([Brezis], [Lax])

Def Un espace de Banach E est uniformément convexe lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ \|x\|, \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$

Ex : $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est uniformément convexe, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ ne l'est pas.

Théorème (Milman-Pettis). Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif

↑ PAS ÉVIDENT.

Prop : L^p est uniformément convexe pour $1<p<\infty$

⚠ C'est plus difficile pour $2<p<\infty$ mais on a une preuve directe de la prop suivante dans ce cas :

Prop L^p est réflexif pour $1<p<\infty$

Théorème - Pour $1<p<\infty$, $(L^p)' \simeq L^{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ -

III - APPLICATION À L'OPTIMISATION -

1- Analyse convexe : théorie (extrema des fonctions convexes) -

Pb : Existence, unicité, caractérisation de $u \in K$ tel que $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$ où K (convexe) fermé d'un espace de Banach et $J : K \to \mathbb{R}$ (convexe).

Prop (existence et unicité en dimension finie) J, K convexe, K cf -
* J convexe : ni existence ($x \mapsto x$) ni unicité ($x \mapsto 0$)
* J str. convexe : pas existence ($x \mapsto e^x$) mais unicité.
* J α-convexe : existence et unicité.

Prop : J, K convexe - Un point de min local est un min global.

Prop (dim infinie) K convexe, J convexe C^0 sur K coercive - $K \subset H$ Hilbert
Alors il existe un minimum de J sur K -
[α-convexe + simple, convexe : CV faible].

2- Conditions d'optimalité

Thm (inéquation d'Euler, cas convexe) K convexe, J C^0 sur un ouvert contenant K
$u \in K$, J différentiable en u.
* Si u min local de J sur K alors $\langle \nabla J(u), v-u \rangle \geq 0$, $\forall v \in K$ -
* Si J est convexe, la condition est nécessaire et suffisante -

Ex : Proj. sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert -

Ex : Moindres carrés -

→ John-Loewner, fonctionnelles quadratiques formulations variationnelles _

3- Algorithmes de minimisation (sans contraintes, cas convexe)

Déf (méthode de descente) - $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$ où $d_k \in \mathbb{R}^n$ direction de descente et $\rho_k \in \mathbb{R}$ pas -

On veut : $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ et $x_k \to x^*$ où $x^* = \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^n} f(x)$ -

Méthode de relaxation

$d_k = e_{k \bmod n}$; $\rho_k = \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathbb{R}} f(x_k + \rho d_k)$

Thm : Si f α-convexe C^1 alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la méthode de relaxation converge vers x^*.

Ex : Gauss-Seidel

Méthode de gradient à pas fixe

$d_k = -\nabla f(x_k)$; $\rho_k = \rho$ constant -

Thm : Si f α-convexe C^1 et ∇f lipschitz. Alors $\exists R > 0$ tq si $\rho \in]0, R[$ alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_k \to x^*$ et la convergence est géométrique -

Méthode de gradient à pas optimal

$d_k = -\nabla f(x_k)$; $\rho_k = \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathbb{R}} f(x_k + \rho d_k)$

Thm : Si f α-convexe C^1 alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_k \to x^*$ -

Ex : Fonctionnelle quadratique $\rho_k = \frac{\|d_k\|^2}{\langle A d_k, d_k \rangle}$ + estimation d'erreur

Méthode de gradient conjugué

$d_0 = \nabla f(x_0)$, $d_k = \nabla f(x_k) + \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2} d_{k-1}$; $\rho_k = \operatorname{argmin}_{\rho} f(x_k + \rho d_k)$

Cas fonctionnelles quadratiques encore difficile.

Leçon 260

Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le plan général de mes leçons de probabilité est le suivant :

- Héritage de la théorie de la mesure
- Apport des probabilités : indépendance et lois
- Phénomènes asymptotiques
- Problèmes de moment et fonctions caractéristiques

À réordonner selon la leçon.

260. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

I HÉRITAGE DE LA THÉORIE DE LA MESURE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Espérance et moments d'une fonction mesurable

Déf (mesure image). Soient $(\Omega,\mathcal{F})$ et $(\Omega',\mathcal{F}')$ des espaces mesurables et $T:\Omega\to\Omega'$ une application $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-mesurable. Soit μ une mesure sur $(\Omega,\mathcal{F})$. La mesure image de μ par T est la mesure μ_T sur $(\Omega',\mathcal{F}')$ définie par $\forall A'\in\mathcal{F}'$, $\mu_T(A')=\mu(T^{-1}A')$

Thm (transfert) Soient $f:(\Omega',\mathcal{F}')\to(\Omega',\mathcal{F}')$ mesurable. f est μ_T-intégrable ssi $f\circ T$ est μ-intégrable et $\int_\Omega f\circ T\,d\mu=\int_{\Omega'} f\,d\mu_T$

Déf (espérance d'une var). Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Lorsque X est positive ou intégrable, son espérance est $\mathbb{E}(X)=\int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$. X est dite centrée lorsque $\mathbb{E}(X)=0$.

Prop On note $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par la var X. Alors pour toute fonction réelle g mesurable, $\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}} g(x)\,d\mathbb{P}_X(x)$

Ex : Si X a pour densité f, $\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$.

Ex : Si X est discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[g(X)]=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X=n)\,g(n)$.

Prop Soient X et Y deux var. $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$ ssi $\forall g\in C_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(g(X))=\mathbb{E}(g(Y))$.

Déf (moments). On appelle moment d'ordre k de la var X la quantité $\mathbb{E}(X^k)=\int_{\mathbb{R}} x^k\,d\mathbb{P}_X(x)$ lorsque celle-ci a un sens.

Déf (L^p) On appelle espace $L^p(\mathbb{P})$ l'espace vectoriel normé (complet) des var X tq $\mathbb{E}[|X|^p]<\infty$ muni de la norme $\|X\|_p:=\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ (utilise l'inégalité de Hölder)

Prop Si $p<q$, $1\le p,q\le\infty$, alors $L^q\subset L^p$

Déf (Variance). Si $X\in L^2$, alors on définit $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right]=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$

Prop : $\mathbb{E}(X)=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>t)\,dt$.

Déf (covariance) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)$. Si $\mathrm{cov}(X,Y)=0$, X et Y sont non-corrélées

2. Inégalités classiques et théorèmes fondamentaux

Théorème (inégalités classiques). Soient X une var, Y une var, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe.

(Markov) $\mathbb{P}(X\ge\alpha)\le\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X)$ (Chebyshev) $\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|\ge\alpha\right)\le\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Var}(X)$.

(Jensen) $\varphi(\mathbb{E}(X))\le\mathbb{E}(\varphi(X))$. (Hölder) $\mathbb{E}(|XY|)\le\left(\mathbb{E}(|X|^p)\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}(|X|^{p'})\right)^{1/p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

App : Le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.

App (Loi faible des grands nombres L^2) Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires L^2, deux à deux non corrélées et telles que $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ et $\mathrm{Var}(X_i)<\infty$. Soit $S_n=X_1+\dots+X_n$. Alors $\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mu$ dans L^2 et en probabilité.

Théorème (convergence monotone). Soit $(X_n)_n$ une suite croissante de variables aléatoires positives. Alors $\sup_n\mathbb{E}(X_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty}X_n\right)=\mathbb{E}(\sup_n X_n)$.

Théorème (Fatou). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives. $\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to+\infty}X_n\right)\le\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)$.

Théorème (convergence dominée). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire X. On suppose qu'il existe Y positive tq $\forall n,|X_n|\le Y$ p.s et $\mathbb{E}(Y)<\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(|X_n-X|)=0$. En particulier $\mathbb{E}(X_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{E}(X)$

App :

C-ex :

3. Espérances et variances de quelques lois usuelles

loi	espérance	variance
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

loi	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	m	σ^2
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

II - DANS UN CADRE PROBABILISTE : INDÉPENDANCE, CONVERGENCE EN LOI

1 - Fonction caractéristique, moments, indépendance

Déf. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ (resp. X une var) on définit sa fonction caractéristique $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$ (resp. $\varphi_X = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x)$), $t \in \mathbb{R}$

Propriétés. (i) $\varphi(0) = 1$ (ii) $\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t)| \leq 1$ (iii) φ est uniformément continue -
(iv) Si $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ alors φ_X est k-fois différentiable et

$$\varphi_X(t) \underset{t \to 0}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbb{E}(X^j)}{j!}(it)^j + o(t^k).$$

En particulier pour $n \in \{0, \dots, k\}$, $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n)$.

(v) Si $\varphi_X^{(2k)}(0)$ existe, alors $\mathbb{E}(|X|^{2k}) < \infty$.

Ex : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Thm (inversion). Si $a < b$, la limite suivante existe et vaut :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}).$$

Corollaire. La fonction caractéristique caractérise la loi.

Rem : Tous ces résultats admettent des généralisation en dimension $d \geq 2$.

Déf (indépendance). Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $(\Omega', \mathcal{F}')$ sont indépendantes lorsque $\forall A, B \in \mathcal{F}'$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Théorème X et Y sont indépendantes ssi $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$

2 - Indépendance, corrélation

Prop. Si X, Y sont indépendantes et intégrables, XY est intégrable et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Corollaire. indépendance $\Rightarrow$ non corrélation -

C-ex :

X \ Y	1	0	-1
1	b	a	0
0	b	c	b
-1	0	a	0

avec $a, b > 0$, $c \geq 0$ $\quad \mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ mais :
$2a + 2b + c = 1$ $\quad \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0 \neq ab = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)$

Prop. Soient X, Y deux variables aléatoires gaussiennes telles que la loi conjointe de (X, Y) soit gaussienne (i.e. (X, Y) est un vecteur gaussien). Si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ alors X et Y sont indépendantes.

C-ex. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $S \sim \mathrm{Rad}(\frac{1}{2})$, $Y = SX$. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y pas ind.

Aff : (La construction du mouvement brownien par Paul Lévy)

Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, on définit $f_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{-(n+2)/2} & \text{si } t \in (k + \frac{1}{2})2^{-n} \\ 0 & \text{si } t \notin (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \\ \text{linéaire} & \text{entre} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $(X_{n,k})_{n,k}$ une suite de var iid $\mathcal{N}(0,1)$.

Alors p.s. $B_t = tX + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} X_{nk} f_{nk}(t)$ converge uniformément pour $0 \leq t \leq 1$

et (i) $\forall t, s \in [0,1]$, $t+s \in [0,1]$, $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ (ii) $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, les incréments B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}$, $\dots$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants -

3 - Théorémes limite

Théorème (Loi forte des grands nombres). Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes iid avec $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$. Soient $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Alors $\frac{S_n}{n} \to \mu$ p.s -

Ap :

Déf : Soit (μ_n) une suite de mesures de proba sur $\mathbb{R}$ (resp. $(X_n)_n$ une suite de var). On dit que $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ (resp. $(X_n)_n$ converge en loi vers X) lorsque $F_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} F$ simplement en tout point de continuité où $(F_n)_n$, F sont les fonctions de répartitions respectives. On note $\mu_n \Rightarrow \mu$ (resp. $X_n \Rightarrow X$)

Prop : $X_n \Rightarrow X$ ssi $\forall f \in C_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$.

Prop. Si $\mu_n \Rightarrow \mu$ alors (φ_n) converge simplement vers φ.

Thm (Lévy) On suppose que la suite des fonctions caractéristiques vérifient (a) $(\varphi_n)_n$ CVS vers φ (b) φ est continue en 0.

Alors (i) il existe une mesure de proba μ tq $\mu_n \Rightarrow \mu$ (ii) φ est la fct° carac. de μ.

Thm (Central-limite). Soit $(X_n)_n$ une suite de var iid de moyenne μ et de variance σ^2. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une var $\mathcal{N}(0,1)$.

III. PROBLÈMES DE MOMENTS ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES -

voir leçon 261

Leçon 261

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Le plan général de mes leçons de probabilité est le suivant :

- Héritage de la théorie de la mesure
- Apport des probabilités : indépendance et lois
- Phénomènes asymptotiques
- Problèmes de moment et fonctions caractéristiques

À réordonner selon la leçon.

Ici la formule d'inversion est évidemment très importante, le fait qu'elle caractérise la loi est une conséquence du lemme $\pi - \lambda$ des classes monotones (cf. Appel, *Probabilité pour les non probabilistes* ou Billingsley, *Probability and Measure*) :

- Un π-système est une classe de parties stable par intersections finies.
- Une classe monotone est une classe de partie de Ω stable par union dénombrable croissante, par différence et qui contient Ω
- Si $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, la classe des éléments de $\mathcal{F}$ sur lesquels coïncident $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ est une classe monotone.
- (lemme des classes monotones) Toute classe monotone contenant un π-système contient la tribu engendrée par ce π-système.
- Il suffit de montrer que deux mesures de probabilités sur $\mathbf{R}$ muni des boréliens coïncident sur certains intervalles pour conclure qu'elles sont égales.

Il faut mentionner l'existence d'une formule d'inversion en dimension plus grande que 1 mais la citer ne me semble pas essentiel.

Le théorème de Bernstein sur la caractérisation des variables aléatoires gaussiennes est dans Ouvrard, tome 2.

C'est la leçon que j'ai choisie à l'oral, ça s'est pas mal passé et mon plan ressemblait à peu près à ce qui suit, j'ai juste rajouté un paragraphe recopiée sur Billingsley, *Probability and Measure* sur les mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$ à support dans un intervalle : c'est super joli et c'est gratuit puisqu'en fait c'est juste la théorie des séries de Fourier avec son théorème de Féjer adapté ! En plus ça permet de retrouver en deux lignes le critère de Weyl.

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire - Exemples et applications :

I - FONCTION CARACTÉRISTIQUE

1 - Définition et premiers exemples -

Déf. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On définit sa transformée de Fourier ou fonction caractéristique par $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$, $t \in \mathbb{R}$. Si X est une variable aléatoire réelle de loi μ, on définit $\varphi_X(t) = \varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Rem. Si μ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, φ est la transformée de Fourier de f.

Rem. En dimension d, on définit de même $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\cdot x} d\mu(x) = \mathbb{E}[e^{it\cdot X}]$, $t \in \mathbb{R}^d$

Propriétés. φ jouit des propriétés suivantes :

(i) $\varphi(0) = 1$ (ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\varphi(t)| \leq 1$ (iii) φ est uniformément continue.

(iv) Si X a un moment d'ordre n, $\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k)\right| \leq \mathbb{E}\left(\min\left\{\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!}\right\}\right)$

(v) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Exemples : * $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$, $\varphi_X(t) = \cos t$.

* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$

* $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$

* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$

C-ex : $X \sim$ Cauchy, $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$

2 - Formule d'inversion et conséquences -

Théorème (Lévy - inversion). Si $a < b$ alors la limite suivante existe et vaut :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

Ajouter le détail avec fonction de répartition ?

Corollaire. Deux variables aléatoires ont la même loi ssi leurs fonctions caractéristiques sont égales.

Thm. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ alors μ admet une densité continue bornée $f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} \varphi(t) dt$.

Ex : Si $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ alors X et $-X$ suivent la même loi.

C-ex : $X \sim \mathcal{E}xp(1)$ admet une densité mais $\varphi_X \notin L^1(\mathbb{R})$.

Prop. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(\{a\}) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-iat} \varphi(t) dt$.

3. Réseaux

Théorème. Soit X une var. Il y a trois possibilités :

(i) $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \neq 0$ (ii) $|\varphi(t)| = 1$ pour tout t et X est p.s constante

(iii) Il existe un plus petit $\tau > 0$ tq $|\varphi(\tau)| = 1$ et la loi $\mathbb{P}_X$ est concentrée sur un réseau $a + \frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ au sens où $\mathbb{P}_X(X \in a + \frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}) = 1$.

II - FONCTION CARACTÉRISTIQUE - INDÉPENDANCE - SOMMES -

1. Indépendance - Somme

Théorème. Les var $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\varphi_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t_n)$.

Rem : Repose sur une formule d'inversion en dimension n.

Théorème. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes alors :

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t).$$

Ex : Si X est une var et $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$.

Ex : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\varphi_X(t) = q + pe^{it}$ où $q = 1-p$.

Ex : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n$

App (loi multinomiale). Soient $Z_1, \dots, Z_n$ iid à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$. On pose $X_n^k = \text{card}\{1 \leq l \leq n, Z_l = k\}$. Alors $\mathbb{P}(X_n^1 = n_1, \dots, X_n^m = n_m) = \frac{n!}{n_1! \times n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$.

2. Quelques applications

Thm (régularisation par convolution).

Thm (Bernstein). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
$X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ $X+Y$ et $X-Y$ suivent des lois gaussiennes.

III - THÉORÈMES LIMITES

1. Convergence en loi et fonction caractéristique

Prop/Déf. Soient $(X_n)_n$ une suite de var réelles et X une var. On note F_n, F et μ_n, μ respectivement les fonctions de répartition et les mesures de probabilité images.
Il y a équivalence entre :
(i) $(F_n)_n$ cvs F en tout point de continuité (ii) Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$
Dans ce cas on dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X ou que $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ. On note selon le contexte : $X_n \Rightarrow X$, $F_n \Rightarrow F$ ou $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Thm (Prokhorov). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ tendue
i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n([-M, M]^c) < \varepsilon$. Alors il existe une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ et une mesure de probabilité μ_∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu_\infty$

Corollaire. Si $(\mu_n)_n$ est tendue et que toute sous-suite qui converge faiblement converge vers μ alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Théorème (Lévy. Continuité). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité dont on note $(\varphi_n)_n$ les fonctions caractéristique. On suppose que :
(a) $(\varphi_n)_n$ cvs vers une fonction φ_∞ (b) φ_∞ est continue en 0.
Alors (i) il existe une mesure de proba μ_∞ tq $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ (ii) φ_∞ est la c.f de μ_∞.

Prop : Si $\mu_n \Rightarrow \mu$ alors $(\varphi_n)_n$ cvs vers φ.

2. Applications aux théorème central limite et de Poisson

Thm (Central limite). Soient $(X_n)_n$ une suite de var iid de moyenne μ et de variance σ^2. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une var $\mathcal{N}(0,1)$.

App (intervalle de confiance)

Théorème (Poisson, événements rares). Soient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n,m}$, $1 \le m \le n$ des var iid avec $X_{n,m} \sim \mathcal{B}(p_{n,m})$. On suppose que :
(i) $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to \lambda \in (0, \infty)$ (ii) $\max_{1 \le m \le n} p_{n,m} \to 0$
Soit $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$. Alors $S_n \Rightarrow Z$ et $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$

App : Soit $(S_n)_n$ avec $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n \to +\infty} n p_n = \lambda > 0$, alors $(S_n)_n$ converge en loi vers une var Poisson(λ).

IV. PROBLÈMES DE MOMENTS -

Prop - (i) Si $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$ alors φ_X est k fois différentiable et

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \mathbb{E}(X^j) (it)^j + o(t^k) \quad , t \to 0$$

En particulier pour $n = 1, \dots, k$, $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n)$

(ii) Réciproquement, si $\varphi_X^{(2k)}(0)$ existe et est fini, alors $\mathbb{E}(|X|^{2k}) < \infty$

1- Le théorème de Hamburger et la méthode des moments -

Thm (Hamburger) - Soit $(m_k)_k$ une suite de réels vérifiant la condition : $\limsup_{k \to +\infty} \frac{m_{2k}^{1/2k}}{2k} < \infty$ - Alors il existe au plus une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont les moments sont les m_k.

Déf : Une mesure de probabilité satisfaisant la conclusion du théorème est dite caractérisée par ses moments - / déterminée

Ex : La loi normale est déterminée par ses moments -

C-ex : La loi log-normale définie par la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{2}\right), x > 0$ n'est pas caractérisée par ses moments -

Théorème (méthode des moments) - Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles dont on note $(m_{n,k})_{n,k}$ les moments - On suppose que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $m_{n,k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} m_k$ et que la suite $(m_k)_k$ vérifie l'hypothèse du théorème - Alors $(\mu_n)_n$ converge "faiblement" vers l'unique mesure de probabilité dont les moments sont les $(m_k)_k$.

2- Applications

[Billingsley]

3- Fonction génératrice des moments -

Déf - Soit X une var. On appelle fonction génératrice des moments ou transformée de Laplace la fonction $M(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$ pour $s \in \mathbb{R}$ tels que cette expression soit finie -

Prop - Si M est définie sur $(-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$, alors X a des moments de tous ordres et $M(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \mathbb{E}(X^k)$ et $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

Ex : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $M(s) = e^{s^2/2}$

Prop - Si M est définie dans un voisinage de 0, la loi de X est déterminée par ses moments -

Prop - Si X et Y sont indépendantes, $M_{X+Y} = M_X M_Y$.

Applications dans le cas discret -

Un exemple [Candelperghes] + Galton-Watson -

Leçon 262

Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Meilleure leçon du monde !

Attention le théorème de Vitali devrait être après le théorème de convergence dominée puisqu'il en est une généralisation (voir Walsh, *Knowing the Odds* ou Billingsley, *Probability and Measure*). La méthode des moments (voir développement) en est une jolie illustration.

Il y a une certaine ambiguïté sur la convergence en loi : pour les variables aléatoires c'est à moitié intéressant puisqu'essentiellement on peut toujours se ramener à une convergence presque sûre (c'est le théorème de Skorohod) : du coup je préfère voir ça comme un mode de convergence pour les mesures de probabilité.

Le lemme de Borel-Cantelli et la loi du 0-1 n'ont rien à faire à la place où ils sont, mais je ne sais pas où les mettre (probablement au tout début).

Il y a toute une littérature (notamment en théorie des jeux je crois) sur la métrisation des différents modes de convergence : pour le convergence en probabilité, c'est facile (cf. Appel, *Probabilité pour les non probabilistes*) mais c'est difficile pour la convergence en loi (cf. l'autre livre de Billingsley, *Convergence of Probability Measures*). Cependant on peut parler de distance en variation (cf. Durrett, *Probability : Theory and Examples* et le livre de W. Appel) pour les variables aléatoires discrètes mais aussi pour montrer le théorème de Scheffé (cf. Durrett).

Je ne comprends toujours pas pourquoi on ne parle pas plus du théorème de Prokhorov à l'agrégation : en dimension 1 c'est un critère de compacité facile (il résulte du théorème de Helly qui est un développement classique) qui est super utile, ne serait-ce que pour montrer le théorème de Lévy... On pourra consulter la page de Gabriel Lepetit, keur sur lui.

Cette leçon a été réalisée en collaboration avec Grégoire Clarté et David Michel, keur sur eux.

I - Three forms of convergence in a probability space.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $(X_n)_n$ a sequence of random variables

1 - Definitions

Def 1 · (i) $(X_n)_n$ converges to X almost surely (a.s.) if there exists $\Lambda \in \mathcal{F}$ such that $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ and for all $\omega \notin \Lambda$, $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$. We write $X_n \to X$ a.s.

(ii) Let $p \geq 1$. $(X_n)_n$ converges to X in L^p if $|X|^p$ is integrable and $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. We write $X_n \xrightarrow{L^p} X$

(iii) $(X_n)_n$ converges to X in probability if for all $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. We write $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Prop 2. If $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ and $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ then $X = Y$ a.s.

Theorem 3. Let a be a constant and suppose $X_n \to X$ and $Y_n \to Y$

(a) and (b) hold for convergence a.s, in L^1 and in probability

(a) $X_n + Y_n \to X + Y$ (b) $aX_n \to aX$.

(c) and (d) hold for convergence a.s and in probability:

(c) $X_n Y_n \to XY$ (d) If $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, $\frac{Y_n}{X_n} \to \frac{Y}{X}$.

Prop. 4 · Suppose $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ and let f be a continuous function. Then $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

Prop. 5 (Cauchy) Suppose that for all $\varepsilon > 0$ there is N such that for all $m, n > N$, $\mathbb{P}(|X_m - X_n| > \varepsilon) < \varepsilon$. Then there exists a random variable X s.t. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Prop. 6 · $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ iif every subsequence $(X_{n_k})_k$ contains a further subsequence that converges a.e. to X.

Prop. 7. The convergence in probability is metrizable with the following metrics:

· $\rho(X,Y) := \mathbb{E}\left(\frac{|Y-X|}{1+|Y-X|}\right)$ · $\rho(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y-X| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$.

C-ex 8 : Convergence almost surely is not metrizable.

2 - Relations between the different modes of convergence.

Theorem 9. (i) If $X_n \xrightarrow{L^p} X$ for some $p > 0$ then $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) If $X_n \xrightarrow{L^r} X$ for some $r > 1$ then $X_n \xrightarrow{L^p} X$ for all $1 \leq p \leq r$

(iii) If $X_n \to X$ a.s. then $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

C-ex 10 · The converses for (i), (ii) and (iii) are false:

(i) Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ random variables. $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ but $Y_n \not\to 0$ in L^1.

(ii) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ on $(0,1)$ is L^1 but not L^2.

(iii) Consider $(X_n)_n$ independent s.t. $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Def 11 · $(X_n)_n$ is said uniformly integrable if, given $\varepsilon > 0$, there exists $K \in [0, \infty)$ such that $\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| \geq K}] \leq \varepsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 12 (Vitali) $(X_n)_n$ converges in L^p if and only if $(X_n)_n$ is uniformly integrable and converges in probability.

Theorem 13. Suppose $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ then there exists a subsequence (n_k) such that $X_{n_k} \to X$ a.s.

3. Convergence theorems for expectations.

Theorem 14 (monotone convergence). Let $X_1, X_2, \dots$ be positive random variables such that $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \leq X_{n+1}$ a.s. and $X_n \to X$ a.s. Then: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$. **Rem**: This holds even if $\mathbb{E}(X) = +\infty$.

Corollary 15. Suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \geq X_{n+1}$ a.s. and $X_n \to X$ a.s. If $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ then $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

C-ex: The result is false without the integrability condition: on the probability space $((0,1), \mathcal{B}, dx)$, consider $X_n(x) = \frac{1}{nx}$.

Theorem 16 (Fatou's lemma). Let $(X_n)_n$ a sequence of positive random variables. Then $\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to+\infty} X_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Theorem 17 (dominated convergence) Let X and X_n, $n \in \mathbb{N}^*$ be random variables. Suppose that there is a random variable Y such that:

(i) $|X_n| \leq Y$ a.s. for all n (ii) $X_n \to X$ either a.s. or in probability.

(iii) $\mathbb{E}(Y) < \infty$.

Then $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$. (in fact $X_n \xrightarrow{L^1} X$).

II - CONVERGENCE IN DISTRIBUTION.

1 - Definition

Def 18. Let X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, X be real random variables with distribution functions F_n and F. $(X_n)_n$ converges in distribution to X if $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$ for all x which are continuity points of F.

We write either $X_n \Rightarrow X$ or $F_n \Rightarrow F$.

Rem 19: We also write $\mu_n \Rightarrow \mu$ where $\mu_n = \mathbb{P}_{X_n}$ and $\mu = \mathbb{P}_X$.

and say that μ_n converges to μ weakly

Theorem 20. $X_n \Rightarrow X$ iff for all bounded continuous function f, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$

Rem 21. We take this alternative definition when $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $d > 1$.

Theorem 21 (Portmanteau). The following statements are equivalent:

(i) $X_n \Rightarrow X$ (ii) for all open sets U, $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in U) \geq \mathbb{P}(X \in U)$.

(iii) For all closed sets K, $\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in K) \leq \mathbb{P}(X \in K)$.

(iv) For all sets A with $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Example 22 (Birthday problem) Let $X_1, X_2, \dots$ be independent and uniformly distributed on $\{1, \dots, N\}$ and let $T = \min\{n, X_n = X_m \text{ for some } m < n\}$

Then $\mathbb{P}(T_N > n) = \prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{m-1}{N}\right)$ and $\mathbb{P}\left(\frac{T_N}{N^{1/2}} > x\right) \longrightarrow \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ for all $x \geq 0$.

Def/Prop 23 Let E be a polish space and $\mathcal{P}(E)$ the space of probability measures on E. The Lévy-Prokhorov distance on $\mathcal{P}(E)$ is defined by:

$$D_{LP}(\rho_1, \rho_2) = \inf\{\varepsilon > 0,\ \rho_1(A) \leq \rho_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ and } \rho_2(A) \leq \rho_1(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ for all } A \in \mathcal{B}_E\}$$

where $\mathcal{B}_E$ is the σ-algebra of Borel sets on (E, d) and $A^\varepsilon = \{x, d(x, A) < \varepsilon\}$.

$(\mathcal{P}(E), D_{LP})$ is a polish space and D_{LP} is a metrization of the weak convergence.

Def/Prop 24. Let μ and ν be two probability measures on a countable set S

The total variation distance between μ and ν is defined by:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sum_{z \in S} |\mu(\{z\}) - \nu(\{z\})| = 2 \sup_{A \subset S} |\mu(A) - \nu(A)|$$

It defines a metric s.t. $\|\mu_n - \mu\|_{TV} \to 0 \iff \mu_n \Rightarrow \mu$.

Application 25: Take a 52 cards deck. After 12 riffle shuffles the deck is "random enough" for all practical purposes.

2. Relations with the other modes of convergence.

Theorem 26. Convergence in probability implies convergence in distribution.

C-ex. 27. On the probability space $([0,1], \mathcal{B}, dx)$ consider the sequence.

$$X_n = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[} & \text{if } n \text{ is even} \\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{and define } X = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[}.$$

The distribution of X_n and X is $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ but $(X_n)_n$ neither converges a.s nor in probability.

Prop. 27. If $X_n \Rightarrow c$ where c is a constant then $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Theorem 28 (Slutsky). Suppose that $X_n \Rightarrow X$ and $Y \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ where c is a constant.

Then: $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$; $X_n Y_n \Rightarrow cX$

Theorem 29 (Skorohod). If $F_n \Rightarrow F$ then there are random variables $\begin{matrix} Y_n \\ Y \end{matrix}$, $1 \leq n$ with distribution functions $\begin{matrix} F_n \\ F \end{matrix}$, $n \geq 1$ such that $Y_n \to Y$ a.s.

3. Compactness results

Theorem 30 (Helly). Let $(F_n)_n$ be a sequence of distribution functions Then there exists a subsequence $(n_k)_k$ such that (F_{n_k}) converges pointwise to a limit function F_∞. If F_∞ satisfies: $\lim_{x\to+\infty} F_\infty(x) = 1$ and $\lim_{x\to-\infty} F_\infty(x) = 0$ then there exists a distribution function F such that $F_n \Rightarrow F$.

C-ex 31: the limit may not be a distribution function - $X_n = n$, $F_n(x) = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}(x) \to 0$ for all x.

Def 32 A family $\{\mu_\alpha, \alpha \in I\}$ of probability distributions is tight if for every $\varepsilon > 0$ there exists n such that for all $\alpha \in I$, $\mu_\alpha([-n, n]) > 1 - \varepsilon$.

Theorem 33 (Prokhorov) Suppose that $(\mu_n)_n$ is a tight sequence of probability measures with distribution functions $(F_n)_n$. Then there exists a subsequence (n_k) such that the sequence $(\mu_{n_k})_k$ converges weakly to a probability measure.

4. Characteristic function

Def 34. The characteristic function of a random variable X is the function $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Theorem 35. Here is a summary of the properties of the characteristic funct:

(i) $\phi(0) = 1$, $|\phi(t)| \leq 1$ for all $t \in \mathbb{R}$ and ϕ is uniformly continuous

(ii) If $\mathbb{E}(|X|^n < \infty)$ then ϕ is n times differentiable and $\phi^{(n)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$ for $k \in \{1, \dots, n\}$. Conversely if $\phi^{(2k)}(0) < \infty$ then $\mathbb{E}[|X|^{2k}] < \infty$

(iii) If μ is a probability measure, one has for all $a < b$:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\,dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

Theorem 36 (Lévy) Let (μ_n) be a sequence of probability measures with characteristic functions $(\phi_n)_n$. Suppose ϕ_n CV pointwise to ϕ_∞ and ϕ_∞ is continuous at $t = 0$. Then there exists a probability measure μ_∞ such that $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ and ϕ_∞ is the caracteristic function of μ_∞.

App. 37 : Suppose $\int x^k dF_n(x)$ has a limit μ_k for each $k \in \mathbb{N}$ and $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k} < +\infty$ then there exists a unique distribution F with moments μ_k and $F_n \Rightarrow F$.

III - LIMIT THEOREMS

1. The Borel-Cantelli lemma.

Theorem 38 (Borel-Cantelli). Let $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ be a sequence of events.

(i) If $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) < \infty$ then $\mathbb{P}\left(\limsup_n \Lambda_n\right) = 0$.

(ii) If the Λ_n are independant there are only two possibilities $\mathbb{P}\left(\limsup_n \Lambda_n\right) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \sum \mathbb{P}(\Lambda_n) < \infty \\ 1 \Leftrightarrow \sum \mathbb{P}(\Lambda_n) = \infty \end{cases}$

App. 39 : If $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, then there exists a subsequence (n_k) s.t. $X_{n_k} \to X$ a.s.

Theorem 40 (Kolmogorov 0-1 law). Let $(X_n)_n$ be a sequence of independant r.v. Then its tail field $\mathcal{T}_\infty$ is trivial where $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, \dots)$ and $\mathcal{T}_\infty = \bigcap_n \mathcal{T}_n$.

App. 41 : If $S_n = X_1 + \dots + X_n$ then with probability zero or one $(S_n)_n$ converges.

2. Laws of large numbers

Theorem 42 (weak-law). Let $(X_n)_n$ be a sequence of independant (uncorrelated is enough) r.v. with $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ and $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$. Then $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ where $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

App 43 : Weierstrass' theorem about the density of polynomials.

Theorem 44 (strong law). Let $(X_n)_n$ be a sequence of pairwise independant identically distributed r.v. with $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$. Let $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ then $\frac{S_n}{n} \to \mu$ a.s. where $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

App. 45 (Glivenko-Cantelli theorem) Let $X_1, X_2, \dots$ be iid with distribution F and let $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_m \le x\}}$. Then $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0$ a.s.

App. 46 (Shannon's theorem) Let $X_1, X_2, \dots \in \{1, \dots, r\}$ independant with $\mathbb{P}(X_i = k) = p_k > 0$. Let $\pi_n(\omega) = p(X_1(\omega)) \cdots p(X_n(\omega))$. Then $\frac{1}{n} \log \pi_n \to \sum_{k=1}^{r} p_k \log p_k =: H$ a.s.

App. 47 : Monte-Carlo Integration. App. 48 : Kolmogorov-Smirnov test.

3. Central limit Theorem -

Theorem 49 (Central limit theorem). Let $X_1, X_2, \dots$ be iid with $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Then $(S_n - n\mu)/\sigma n^{1/2} \Rightarrow \mathcal{X}$ where $\mathcal{X}$ has the standard normal distribution.

App. 50 (Coin flips). Let $X_1, X_2, \dots$ be iid $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ random variables. Since $\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/4} \Rightarrow \mathcal{X}$, for n large enough $\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]\right) \simeq 0,95$.

App. 51 : δ-method

App. 52 : The Life.

4. Poisson convergence.

Theorem 53 (law of rare events). For each n let $X_{n,m}$, $1 \le m \le n$ be independant r.v. with $\mathbb{P}(X_{n,m} = 1) = p_{n,m}$ and $\mathbb{P}(X_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}$. Suppose :

(i) $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to \lambda \in (0, \infty)$ (ii) $\max_{1 \le m \le n} p_{n,m} \to 0$.

Then $S_n \Rightarrow Z$ where Z is Poisson (λ) and $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$.

Example 54. Let $\lambda > 0$ and $p_{n,m} = \frac{\lambda}{n}$. The law of rare events states that the Poisson distribution may be used an approximation of the binomial distribution $\mathcal{B}(n,p)$ when $\begin{matrix} n \to +\infty \\ p \to 0 \end{matrix}$ and $np = \lambda$.

IV - LÉVY'S CONSTRUCTION OF BROWNIAN MOTION.

Def 55 (Brownian motion). A brownian motion is a stochastic process $\{B_t, t \ge 0\}$ which satisfies the following properties :

(i) $B_0 = 0$ (ii) $B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0,t)$ (iii) If $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n$ then the increments B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}$, .. are independant.

Let $f_{nk}(t) = \begin{cases} 2^{-(n+2)/2} & \text{if } t = (k+\frac{1}{2})2^{-n} \\ 0 & \text{if } t \notin (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \\ \text{linear} & \text{in between.} \end{cases}$

Theorem 56 (Lévy). Let X and X_{nk}, $n, k \in \mathbb{N}$, be iid $\mathcal{N}(0,1)$ r.v. Then with probability one the series $W_t = tX + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} X_{nk} f_{nk}(t)$ converges uniformly for $0 \le t \le 1$. Moreover $\{W_t, 0 \le t \le 1\}$ is a standard Brownian motion.

V - TWO FAMOUS URNS

Theorem 57 (Ergodic). Let $(X_n)_n$ be an irreducible finite Markov chain with stationary distribution π. Then :

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} = \pi(x)$ a.s. (ii) for all state x, $\pi(x) = 1/\mathbb{E}\left(\frac{t}{T_x}\right) > 0$ where $T_x = \inf\{k \ge X_k^x = x\}$

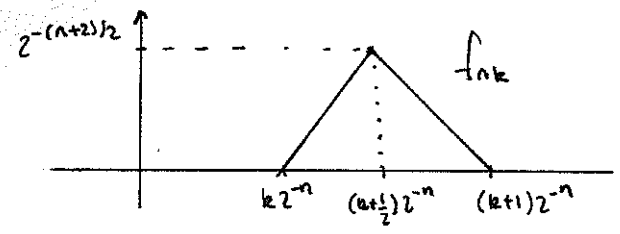
Corollary 58 : for all state x, $\mathbb{P}(X_n = x \text{ i.o.}) = 1$.

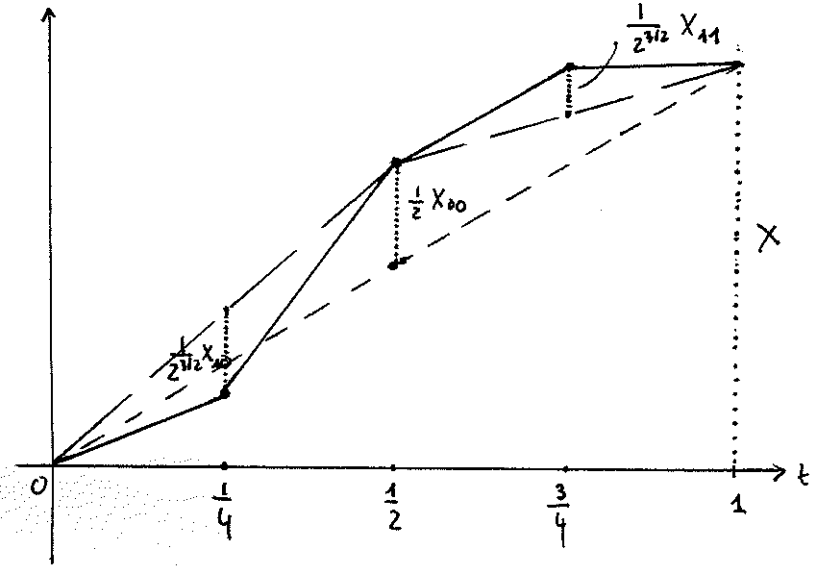
Example 59 (Ehrenfest urns) There is a total of r balls in two urns. We pick one of the r balls at random and move it to the other urn. Infinitely often one of the two urns is empty.

Theorem 60 (Martingale). If $(X_n)_n$ is a martingale with $\sup \mathbb{E}(|X_n|^2) < \infty$ then X_n converges a.s. and in L^2 to a limit X

Example 61 (Polya urn) An urn contains N balls of different colours $1, 2, \dots, m$. At each time we draw a ball out then replace it and add a ball of the color drawn. Let X_n^i be the fraction of balls of color i after the n-th draw. $(X_n^i)_n$ is a martingale which satisfies the hypotheses of theorem 60.

APPENDIX





The three first iterations of the construction of the Brownian Motion.

REFERENCES

R. Durrett, Probability : Theory and Examples, 3rd Edition.

J. B. Walsh, Knowing the Odds : an introduction to Probability

B. Candelpergher, Théorie des Probabilités : une introduction élémentaire.

Leçon 263

Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Le plan général de mes leçons de probabilité est le suivant :

- Héritage de la théorie de la mesure
- Apport des probabilités : indépendance et lois
- Phénomènes asymptotiques
- Problèmes de moment et fonctions caractéristiques

À réordonner selon la leçon.

Ici j'ai rajouté une partie sur la simulation des lois usuelles pour faire plus long et pour faire plaisir au jury.

J'ai tout recopié dans W. Appel, *Probabilités pour les non probabilistes*.

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

I - GÉNÉRALITÉS

1. Absolue continuité et autres résultats issus de la théorie de la mesure.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable.

Déf : Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que μ est absolument continue par rapport à ν lorsque $\forall A \in \mathcal{F}$, $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Thm (Radon-Nikodym) : Si $\mu \ll \nu$ alors il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$. f est unique ν-pp.

Déf : Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ est dite "à densité" lorsque sa loi $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle "densité" la fonction f. $\int f = 1$.

Rem : Lorsque $X : \Omega \to \mathbb{R}$, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que
$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \quad \text{et} \quad \forall \text{ pp } x \in \mathbb{R}, \ f(x) = F'(x).$$

Rem : Le théorème fondamental du calcul stipule que "$\mathbb{P}_X \ll \text{Leb}$" est équivalent à "$F_X$ est absolument continue".

C-ex : L'escalier de Cantor est une fonction continue qui n'est pas absolument C°.

Thm (décomposition de Lebesgue) : Soit F une fonction de répartition. Alors il existe trois fonctions croissantes F_d (échelle), F_{ac} (abs C°) et F_s (singulière ie C° dérivable pp de dérivée nulle) telles que $F = F_d + F_{ac} + F_s$. Cette décomposition est unique.

Thm (transfert) : Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables, $T : \Omega \to \Omega'$ et $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ des applications mesurables. Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors :
* $\forall A' \in \mathcal{F}'$, $\mu_T(A') = \mu(T^{-1}A')$ définit une mesure sur $(\Omega', \mathcal{F}')$
* f est μ_T-intégrable ssi $f \circ T$ est μ-intégrable et $\int_\Omega f \circ T \, d\mu = \int_{\Omega'} f \, d\mu_T$

Déf (moments) : Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une v.a. dont on suppose qu'elle admet une densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. On définit lorsque cela a un sens :
* (espérance) $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$
* (moment) $\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx$.
* (variance) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$
* (covariance) Si $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ va, $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$

2. Opérations usuelles, indépendance.

Déf : Un vecteur aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est dit à densité lorsque $\mathbb{P}_X \ll \text{Leb}$.

Prop (Fubini) : Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ alors les marginales X_i sont des va à densité avec pour densités $f_{X_i}(x_i) = \int\!\!\cdots\!\!\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \dots, x_d)\,dx_1 \dots dx_{i-1}\,dx_{i+1} \dots dx_d$.

Thm (chgt de variable) : Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un C^1-difféo de $\mathbb{R}^d$ sur $\varphi(\mathbb{R}^d)$. Alors $Y = \varphi(X)$ est à densité et admet pour densité :
$$g(y) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right) \left|\det \text{Jac}\, \varphi^{-1}\right| \mathbb{1}_{\varphi(\mathbb{R}^d)}.$$

Ap : si $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $R^2 = X^2 + Y^2 \sim \mathcal{E}(1)$ et $\Theta = \text{Arg}(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Ap : Si (X, Y) admet une densité f, XY admet la densité $f_{XY}(z) = \int f\left(v, \frac{z}{v}\right) \frac{dv}{|v|}$.

Ap : Si (X, Y) admet une densité f, $X+Y$ admet la densité $f_{X+Y}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(z-s, s)\,ds$.

Thm (indépendance) : Soient $X_1, \dots, X_d$ admettant des densités $f_1, \dots, f_d$ (var). $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes ssi $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$ est une densité de $X = (X_1, \dots, X_d)$.

Ex : Si (X, Y) admet la densité $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, X et Y ne sont pas ind.

Thm (somme) : Si X et Y sont deux va ind admettant des densités f et g. Alors $X+Y$ est à densité et admet la densité $f * g$.

3. Fonction caractéristique

Déf : Soit X une va à densité (resp. une mesure de proba sur $\mathbb{R}$, $\mu \ll \text{Leb}$) avec pour densité f. On définit la fonction caractéristique de X (resp. μ) par $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\,dx$.

Thm (inversion) : Si $a < b$, on a : $\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\,dt = \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$.

Thm : Si φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors μ admet une densité continue bornée.

Thm (Lévy) : Si $(X_n)_n$ est une suite de va de fonctions caractéristiques $(\varphi_n)_n$. Alors $(\varphi_n)_n$ CVS $\Leftrightarrow$ $(X_n)_n$ CV en loi.

II - LOIS USUELLES SUR $\mathbb{R}$ [Appel], [Walsh]

1 - Loi uniforme

Déf : On note $\mathcal{U}(a,b)$ la loi uniforme sur $[a,b]$. C'est une loi à densité de densité $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Prop : $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Aff : Simulation de lois de probabilité (voir IV).

2 - Loi exponentielle

Déf : La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ est définie par la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \ge 0}$

Prop : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\forall t > s > 0$, $\mathbb{P}(X > t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t-s)$

Thm : La propriété d'absence de mémoire pour les va positives continues caractérise la loi exponentielle.

Ex : Désintégration radioactive.

3 - Loi de Cauchy

Déf La loi de Cauchy(a) est définie par la densité $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$

Rem : Si $X \sim$ Cauchy(a) alors X n'est pas intégrable.

Ex : Un tube fluorescent est à distance a d'un mur. L'intensité lumineuse sur le mur selon la composante verticale suit une loi de Cauchy.

4 - Loi Gamma

Déf La loi Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha, \beta > 0$ est définie par la densité $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

Prop : Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n,\beta)$ est la loi suivie par la somme de n va $\mathcal{E}(\beta)$ indépendantes.

III - LOI NORMALE, VECTEURS GAUSSIENS

1 - Loi normale

Déf : La loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ est définie par la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Prop : Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $E(X) = m$ et $Var(X) = \sigma^2$.

Prop : Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Prop : Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\varphi_X(t) = e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$

Prop : Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors pour $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(|X| \ge \lambda) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$

2 - Théorèmes limites [Duflo]

Thm (Scheffé) Soit $(h_n)_n$ une suite de densités de probabilité qui converge simplement vers une densité de probabilité f. Alors les lois de probabilités respectives $(\mu_n)_n$ et μ vérifient $\mu_n \Rightarrow \mu$ (convergence en loi).

Exemple : Soient $(2n+1)$ réparti uniformément et indépendamment sur $(0,1)$. Soit V_{n+1} la position du $(n+1)$-è plus grand. Alors V_{n+1} a pour densité $f_{V_{n+1}}(x) = (2n+1)\binom{2n}{n} x^n (1-x)^n$ et $Y_n = 2(V_{n+1} - \frac{1}{2})\sqrt{2n}$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Thm (central limite) Soit (X_n) une suite de va iid de moyenne m et variance σ^2. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Aff : estimation d'erreurs.

3. Vecteurs gaussiens [Appel], [Candelpergher]

Déf $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien lorsque toute combinaison linéaire des X_i est une variable aléatoire gaussienne.

C-ex Soit $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. $X_2 = \begin{cases} X_1 & \text{si } |X_1| \le 1 \\ -X_1 & \text{si } |X_1| > 1 \end{cases} \sim \mathcal{N}(0,1)$ mais (X_1, X_2) n'est pas un vecteur gaussien.

Prop : Si $X_1, \dots, X_d$ sont des va gaussiennes indépendantes, alors $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien.

Déf : La matrice de covariance du vecteur $X = (X_1, \dots, X_d)$ est la matrice :

$$cov(X) = \left(cov(X_i, X_j)\right)_{1 \le i,j \le d} \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}).$$

Thm (densité) Un vecteur gaussien X admet une densité ssi sa matrice de covariance est inversible. Dans ce cas, la densité est $f_X(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{\langle x-m, C^{-1}(x-m)\rangle}{2}\right)$ où $m = E(X)$.

Thm (décomposition) Si X est un vecteur gaussien d'espérance m, on peut l'écrire sous la forme $X = QY + m$ où $Q \in O_d(\mathbb{R})$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ est un vecteur formé de var ind de lois resp. $\mathcal{N}(0, \lambda_k)$.

Thm X est gaussien ssi sa fonction caract est de la forme :
$\varphi_X(u) = \exp\left\{ i\langle m, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle \right\}$. Alors $X \sim \mathcal{N}(m, C)$.

Thm (indépendance) : Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien. Les va $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes ssi elles sont décorrélées.

App (Construction du mouvement brownien) Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ on définit $f_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{-(n+2)/2} & \text{si } t = (k + \frac{1}{2})2^{-n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $t \notin (k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, linéaire sinon.

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $(X_{n,k})_{n,k}$ une suite de va iid $\mathcal{N}(0,1)$. Alors : ps la suite de fonctions $t \mapsto B_t^{(N)} = tX + \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^n - 1} X_{n,k} f_{n,k}(t)$ CVU sur $[0,1]$ et la limite $t \mapsto B_t$ vérifie :

(i) $\forall t, s \in [0,1]$, $t+s \in [0,1]$, $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$ (ii) $\forall 0 \le t_1 < \dots < t_n \le 1$ les incréments B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}$, $\dots$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants.

⋮

IV. SIMULATION DE LOIS DE PROBABILITÉ [APPEL]

1. Simuler des lois discrètes à partir de lois à densité

Prop (Bernoulli) Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $X = \begin{cases} 0 \text{ si } U < 1-p \\ 1 \text{ si } U \ge 1-p \end{cases} \sim \mathcal{B}(p)$.

Prop (géométrique) Si $Y \sim \mathcal{E}(\alpha)$ alors $X = \lfloor Y \rfloor + 1 \sim \text{Geom}(1 - e^{-\alpha})$.

Prop (Poisson) Soit $\lambda > 0$, $X_1, X_2, \dots$ iid $\sim \mathcal{E}(1)$. Soit N le plus grand entier n tel que $X_1 + \dots + X_n < \lambda$ ($N = 0$ si $X_1 > \lambda$). Alors $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

2. Simuler une loi continue

Prop (méthode de l'inverse) Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Soit F une fonction de répartition. Soit $G(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \ge y\}$. Alors $G(U)$ admet F pour fonction de répartition.

Ex : Si $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ (loi $\mathcal{E}(\alpha)$), $G(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\alpha}$.

Thm (méthode du rejet). Soit $(U_n)_{n \ge 1}$ une suite de va iid $\sim \mathcal{U}([0,1])$. Soit $(X_n)_n$ une suite de va iid selon une densité g et ind des U_k. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, f(X_n) > U_n \cdot c g(X_n)\}$ et $Y = X_N$. Alors Y admet pour densité f.

Ex : Simulation d'une loi normale par la méthode du rejet.

Prop (Box-Muller) Soit (U, V) un couple de va ind de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $\Theta = 2\pi U$ et $E = -\ln V$ et $R = \sqrt{2E}$. Alors $X = R\sin\Theta$ et $Y = R\cos\Theta$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Leçon 264

Variables aléatoire discrètes. Exemples et applications.

Le plan général de mes leçons de probabilité est le suivant :

- Héritage de la théorie de la mesure
- Apport des probabilités : indépendance et lois
- Phénomènes asymptotiques
- Problèmes de moment et fonctions caractéristiques

À réordonner selon la leçon.

Attention, le résultat sur l'espérance et la dérivation de la fonction génératrice est un tout petit peu subtil : c'est en fait une application du théorème d'Abel (dans un cas simple) sur les séries entières (voir Candelpergher, *Introduction aux probabilités* ou *Objectif Agrégation*).

L'existence d'une suite de variables aléatoire de Rademacher indépendantes est dans le livre de W. Appel ou dans Ouvrard. Le lemme des coalitions résulte du lemme des classes monotones et est clairement sous-estimé.

La distance en variation permet de préciser à peu de frais la vitesse de convergence dans le théorème des événements rares de Poisson : c'est l'inégalité de Le Cam que l'on trouve dans Durrett, *Probability : Theory and Examples.*

264 - Variables aléatoires discrètes - Exemples et applications

I. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : GÉNÉRALITÉS

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1 - Définitions et concepts

Déf. Une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ est dite discrète lorsque le support de la mesure image $\mathbb{P}_X$ par X est dénombrable i.e. $\exists S \subset E$ dénombrable tel que $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) = 1$.

Rem : Si $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ alors $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par $\mathbb{P}(X = x_i)$ et on a $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. **Ex** : δ telle que $\mathbb{P}(\delta = 0) = \mathbb{P}(\delta = 1) = \frac{1}{2}$

Lemme (transfert) Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ des espaces mesurables, μ une mesure sur Ω et $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ mesurable et $T : \Omega \to \Omega'$, $\mathcal{T}/\mathcal{T}'$-mesurable. On note μ_T la mesure image de μ par T. Alors f est μ_T ssi $f \circ T$ est intégrable et $\int_\Omega f \circ T \, d\mu = \int_{\Omega'} f \, d\mu_T$.

Déf (Espérance). L'espérance d'une variable aléatoire réelle est (sous réserve d'existence) la quantité $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$.

Prop. Pour toute fonction mesurable $h : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_E h(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$.
Dans le cas d'une va discrète de support $\{x_1, x_2, \dots\}$ on a en particulier $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_i) \, h(x_i)$.

Rem : Si X est discrète et bornée, alors $\mathbb{E}(X)$ est bien définie et finie.

Ex : $\mathbb{E}[\delta] = \frac{1}{2}$ mais si X telle que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$ alors $\mathbb{E}(X) = \infty$.

Déf (Fonction caractéristique). La fonction caractéristique d'une v.a.r X est $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Dans le cas discret $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} \mathbb{P}(X = x_k)$.

Déf (Variance). Si X est une var de carré intégrable, sa variance est $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

2 - Lois discrètes usuelles et modélisation

loi	modélisation	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Uniforme $\mathcal{U}(n)$	tirage uniforme	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	pile ou face	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X=0) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	nombre de succès en n pile-face	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	nombre d'événements	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$	nbre de boules gagnantes dans un tirage simultané de n boules parmi N dont pN sont gagnantes		$\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$

Déf (réseau). Une variable aléatoire réelle X a une distribution en réseau lorsqu'il existe $b, h > 0$ tels que $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$.

Thm Soit $\varphi(t) = E(e^{itX})$. Il y a trois possibilités :
(i) $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \neq 0$.
(ii) $|\varphi(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas X est p.s. constante.
(iii) $\exists \lambda > 0$, $|\varphi(\lambda)| = 1$ et $|\varphi(t)| < 1$ pour $0 < t < \lambda$. Dans ce cas, X a une distribution en réseau de pas $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Ex (Rademacher). Si $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$ alors X a une distribution en réseau sur $-1 + 2\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{E}(e^{itX}) = \cos t$ et $|\cos(n\pi)| = 1$.

II - VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES INDÉPENDANTES -

1. Définitions

Déf : Deux événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont dits indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Déf - Deux variables aléatoires X, Y sont dites indépendantes lorsque pour tous $C, D \in E$, les événement $\{X \in C\}$ et $\{Y \in D\}$ sont indépendants i.e. $\mathbb{P}(X \in C, Y \in D) = \mathbb{P}(X \in C)\,\mathbb{P}(Y \in D)$. rem : s'étend à n va.

Ex : $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ ind. $A_1 = \{X_2 = X_3\}$, $A_2 = \{X_3 = X_1\}$, $A_3 = \{X_1 = X_2\}$
A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants car $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(X_i = X_j = X_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$
mais ils ne sont pas mutuellement indépendants au sens où :
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$.

Prop (cas discret). Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ où X_i sont des va discrètes à valeurs dans E_i. La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de va indépendantes ssi $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\mathbb{P}(X = x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$.

2. Existence d'une suite de va. de Rademacher indépendantes

Cadre : $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ = mesure de Lebesgue -

Déf Tout $x \in [0,1[$ possède un unique développement dyadique propre
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n(x)}{2^n} \quad \text{où} \quad D_n(x) = \lfloor 2^n x \rfloor - 2\lfloor 2^{n-1} x \rfloor \in \{0,1\}.$$
Réciproquement, toute suite propre $(\omega_n)_n$ (i.e. non stationnaire en 1) donne naissance à un unique $x \in [0,1[$ donné par $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$.

Déf- On appelle intervalle dyadique les intervalles $I_n^k = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$
On pose $R_n(x) = 2D_n(x) - 1 \in \{-1, 1\}$.

Prop : $(R_n)_n$ est une suite de variables de Rademacher indépendantes -

Corollaire Soit $(\mu_j)_j$ une suite de mesures de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite de var (X_j) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes telles que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{X_j} = \mu_j$. [UTILISE LE LEMME DES COALITIONS : SUBTIL]

3- Somme de variables aléatoires indépendantes -

Prop. Soient X, Y deux va discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La loi de $X+Y$ est donnée par $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ où $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y(x) = \sum_y \mathbb{P}_X(x-y)\mathbb{P}_Y(y)$.

App : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}(p)$ indépendantes alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

App (Weierstrass-Bernstein). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Alors la suite des polynômes de Bernstein $B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} f\left(\frac{m}{n}\right)$ converge uniformément vers f.
idée : Si $X_1, \dots, X_2 \sim \mathcal{B}(p)$ ind et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(p)$.

Prop. Si $(X_n)_n$ est une suite de va iid $\mathcal{B}(p)$ alors $T = \inf\{n,\ X_n = 1\}$ suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

4- Fonction génératrice des moments -

Déf - Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice (des moments) de X la fonction $G_X : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) s^n = \mathbb{E}[s^X]$

Propriétés. G_X détermine la loi de X et si X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Thm : $\mathbb{E}(X) < \infty \iff G_X$ dérivable à gauche en 1. Dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$

App : temps d'attente entre deux succès consécutifs dans un jeu de pile ou face $\mathcal{B}(p)$: en moyenne, il vaut $\frac{1+p}{p^2}$.

App (Processus de Galton-Watson) $Z_0 \in \mathbb{N}$. Z_n le nb d'individu à la n-ième génération
N_i^n, $1 \leq i \leq Z_n$: nb de descendants de l'individu i : $Z_{n+1} = N_1^n + \dots + N_{Z_n}^n$
On suppose les (N_i^n) ind de même loi et on note $\mu = \mathbb{E}(N_1^n)$.
$\mathbb{P}(\text{extinction}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}\right)$ est un point fixe de $G(s) = \mathbb{E}[s^{N_1}]$
On en déduit en étudiant la convexité de G que la population s'éteint p.s. ssi $\mu \leq 1$.

III - THÉORÈMES LIMITES - PHÉNOMÈNES ASYMPTOTIQUES -

1 - Convergence en loi d'une suite de va discrète - Distance en variation

Déf. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X et on note $X_n \Rightarrow X$ lorsque $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction $f \in C_b^0$.

Déf (distance en variation) Soient μ_1, μ_2 des mesures de probabilité sur un ensemble dénombrable S. On définit leur distance en variation par :

$$d(\mu_1, \mu_2) \equiv \|\mu_1 - \mu_2\| = \sup_{A \subset S} |\mu_1(A) - \mu_2(A)| = \frac{1}{2} \sum_{z \in S} |\mu_1(z) - \mu_2(z)|$$

Prop. Si μ_n, ν sont des mesures de proba sur $\mathcal{Z}$, il y a équivalence entre :

(i) $\mu_n \Rightarrow \nu$ (ii) $\forall x \in \mathcal{Z}$, $\mu_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} \nu(x)$ (iii) $d(\mu_n, \nu) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

App (battre les cartes) Un paquet de carte est un ensemble fini $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ muni d'une relation d'ordre $<$ ou de façon équivalente d'une permutation $X \in \mathfrak{S}_N$ telle que $X(C_1) < \dots < X(C_n)$ (i.e. la carte $X(C_1)$ est au dessus des autres).

Un mélange est l'action d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ sur $\mathcal{C}$: le paquet $X(C_1) < \dots < X(C_n)$ devient le paquet $\sigma X(C_1) < \dots < \sigma X(C_n)$.

On dit qu'un paquet X est bien mélangé si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ notée π.

Après le "mélange à l'américaine", $d(X_k, \pi) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^k}\right)$.

En particulier pour un paquet de 52 cartes, 10 mélanges suffisent pour que le paquet soit suffisamment bien mélangé.

Prop - Soient $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ des mesures de proba sur $\mathcal{Z}$. On a :

(1) $d(\mu_1 \otimes \mu_2, \nu_1 \otimes \nu_2) \leq d(\mu_1, \nu_1) + d(\mu_2, \nu_2)$.

(2) $d(\mu_1 * \mu_2, \nu_1 * \nu_2) \leq d(\mu_1 \otimes \mu_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$

(3) si $\mu \sim \mathcal{B}(p)$, $\nu \sim \mathcal{P}(p)$ alors $d(\mu, \nu) \leq p^2$

2 - Le théorème des événements rares de Poisson

voir 262

ajouter l'inégalité de Le Cam [Ouvrard].

3-