Leçon n° 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit X un ensemble non-vide quelconque.

I Espaces de fonctions continues

I.A) Fonctions continues et convergence [El Amrani]

Définition 1 – Convergence simple et convergence simple

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de l'ensemble X dans l'espace vectoriel normé E. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement vers f sur X** si, $\forall x$ la suite $(f_n(x))_n$ converge dans E.
Autrement dit :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$$

On note alors $f_n \xrightarrow{\text{C.S}} f$
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f** sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies (\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

On note alors $f_n \xrightarrow{\text{C.U}} f$

Remarque 2

$x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers δ_1 mais pas uniformément.

Proposition 3

On a : CVU $\implies$ CVS.

Définition 4

On définit $C_b(X,E)$ l'espace des fonctions bornées sur X. C'est un espace vectoriel normé pour la norme : $\|f\|_\infty = \sup(\{\|f(x)\|, x \in X\})$

Proposition 5

Soient E un espace vectoriel normé, soit X une partie non-vide d'un espace vectoriel F. Soit $(f_n)_n$ une suite d'application de X dans E qui converge uniformément sur X vers f. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $a \in X$, alors f est continue en a.

Corollaire 6

Une limite uniforme d'applications continues est continue.

Théorème 7 – Théorème de la double limite

Soit X une partie non-vide d'un espace vectoriel normé F, soit E un espace vectoriel normé, soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans E, convergeant uniformément sur X vers une application f, et soit $a \in \bar{X}$ tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite b_n de $(f_n(x))$ lorsque x tend vers a existe. Si E est complet, alors la suite $(b_n)_n$ a une limite b, et $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a. On peut donc inverser les lmites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Théorème 8

L'espace vectoriel normé $(C_b(X,E), \|\|_\infty)$ est complet lorsque E est complet.

I.B. Fonctions continues sur un compact [Gourdon, Hirsch]

Proposition 9

L'image par une application continue d'un compact est compact.

Théorème 10 – Théorème des bornes atteintes

Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ une application continue, où (E,d) est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 11 – Théorème de Heine

Une application continue sur un compact y est uniformément continue.

Théorème 12 – Théorème d'Ascoli

Théorème d'Ascoli

I.C. Densité de familles de fonctions

Théorème 13

Théorème de Weierstrass

Application 14

Si f est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^n dt = 0$ alors $f = 0$.

II. Espaces de fonctions Lebesgue-intégrable

II.A. Définitions et propriétés [Briane-Pagès]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 15

Les espaces L^p avec leurs normes associées.

Proposition 16

Inégalité de Hölder

Remarque 17

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corollaire 18

Inégalité de Minkowski

Proposition 19

$(\mathcal{L}^p(\mu), \|\|_p)$ un espace vectoriel normé.

Théorème 20 – Théorème de Riesz-Fischer

$(\mathcal{L}^p(\mu), \|_p\|)$ est complet.

Proposition 21

Si X est de mesure finie, on a l'inclusion des $\mathcal{L}^p$.

II.B. Convolution et régularisation [Briane-Pagès]

Définition 22

Convolution $L^1 - L^1$ et $L^1 - L^p$

Proposition 23

$(L^1, +, \times, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative sans unité.

Définition 24

Approximation de l'unité

Exemple 25

Noyau de Gauss

Théorème 26

Régularisation par approximation de l'unité.

Corollaire 27

L'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans les L^p pour $p \in [1, +\infty[$.

II.C. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani Fourier]

Définition 28

Définition de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 29

Transformée de Fourier de $1_{[a,b]}$

Lemme 30 – Riemann-Lebesgue

Proposition 31

$\mathcal{F} : L^1 \to C_0(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

Proposition 32

Formule de dualité

Proposition 33

Lien entre convolution et transformée de Fourier.

Théorème 34

Formule d'inversion de Fourier

Corollaire 35

La transformée de Fourier est injective.

Théorème 36 – Principe d'incertidude suédois (BERNIS)

Références :

— Gourdon Analyse,

— El Amrani Suites et séries de fonctions,

— Brézis Analyse-fonctionnelle,

— El Amrani Fourier,

— Hirsch Analyse fonctionnelle,

— BERNIS développement analyse 2EME EDITION,

— Briane-Pagès théorie de l'intégration 4eme edition

Table des matières

I Espaces de fonctions continues **1**

I.A Fonctions continues et convergence [El Amrani] 1

I.B. Fonctions continues sur un compact 1

I.C. Densité de familles de fonctions 1

II. Espaces de fonctions Lebesgue-intégrable **1**

II.A. Définitions et propriétés 1

II.B. Convolution et régularisation 2

II.C. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ 2

INTRO :

Les espaces de fonctions sont véritablement l'archétype des espaces de dimension infinie. Ce qui marque la grande différence entre la dimension finie et la dimension infinie, c'est la topologie : si les résultats sont aussi puissants en dimension finie, c'est essentiellement grâce aux excellentes propriétés topologiques dont on dispose (en particulier la compacité).

On présente donc plusieurs types d'espaces fonctionnels, en gardant à l'esprit que l'on recherche à la fois de la régularité et de bonnes propriétés topologiques. Voici une liste non exhaustive des propriétés topologiques que l'on souhaite obtenir :

— la complétude (c'est vraiment le minimum) ;
— l'existence d'une norme ;
— la séparabilité ;
— des critères de compacité.

Dans les espaces qui suivent, les premiers sont intéressants du point de vue de la régularité, mais moins du point de vue topologique : ils ne sont pas toujours normés et possèdent souvent peu de propriétés de compacité. Les espaces L^p, quant à eux, sont remarquablement adaptés du point de vue topologique, mais n'offrent pratiquement aucune information de régularité.

Enfin, on conclut avec la transformée de Fourier qui permet de créer des objets réguliers à partir d'object a priori mal adapté.

META PLAN :

Leçon 201– Espace de fonctions. Exemples et applications

I. Espace de fonctions continues

I.A. Fonctions continues et convergence

— Convergence simple / uniforme
— Espace $C_b(X, E)$ et norme $\|\cdot\|_\infty$
— CVU $\Rightarrow$ CVS
— Théorème de la double limite
— Complétude de $(C_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$

I.B. Fonctions continues sur un compact

— Image d'un compact par une application continue
— Théorème des bornes atteintes
— Théorème de Heine (UC sur compact)
— Théorème d'Ascoli

I.C. Densité de familles de fonctions

— Théorème de Weierstrass
— Approximation par convolution
— Densité des fonctions régulières

II. Espaces de fonctions Lebesgue intégrable

II.A. Résultats principaux

— Définition des espaces L^p
— Inégalités de Hölder et Minkowski
— Structure d'espace normé
— Inclusions L^p en mesure finie
— Théorème de Riesz-Fischer (complétude)

II.B. Convolution et régularisation

— Convolution $L^1 - L^1$ et $L^1 - L^p$
— Algèbre L^1
— Approximation de l'unité
— Régularisation
— Densité de C_c^∞ dans L^p

II.C. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

— Définition de la transformée de Fourier, Lemme de Riemann-Lebesgue
— Linéarité et continuité
— Lien convolution / Fourier
— Formule d'inversion —>Injectivité
— Principe d'incertitude suédois
— Théorème de Weierstrass par convolution

V. Développements

— Principe d'incertitude suédois
— Théorème de Weierstrass (convolution)

Leçon n° 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Dans toute la suite, on prendra (E, d) un espace métrique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notion de compacité

I.A) Propriété de Borel-Lebesgue [Gourdon]

Définition 1 – Compact

Définition d'un compact (Borel-Lebesgue)

Remarque 2

Tout espace métrique fini est compact, $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 3

Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4

(E, d) est compact si et seulement si pour toute intersection de fermés vide il existe une sous-famille de fermés d'intersection vide.

Corollaire 5

Si $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un espace compact (E, d), alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Proposition 6

Une réunion finie de parties compactes est compacte

Proposition 7

Une intersection de compacts est compact.

Proposition 8

Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

I.B) Propriété de Bolzano-Weierstrass [Gourdon,]

Définition 9

Compact au sens de Bolzano-Weierstrass

Théorème 10

Dans un espace métrique, Borel-Lebesgues $\iff$ Bolzano-Weierstrass

Corollaire 11

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E.

Exemple 12

Les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts

Théorème 13

Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

Théorème 14

Théorème de Tychonov

Proposition 15

Un espace compact est complet.

Proposition 16

Soit E un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de E admettant une et une seule valeur d'adhérence x. Alors $(x_n)_n$ converge vers x.

Proposition 17

Si X est compact alors $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ est complet

II. Compacité et applications continues

II.A. Résultats généraux [Gourdon, El Amrani]

Proposition 18

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Proposition 19

Si $f : (E, d) \to F$ avec F métrique et E compact, f continue et bijective alors f est un homéomorphisme.

Théorème 20 – Théorème des bornes atteintes

Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 21

Avec le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit donc que l'image d'un segment est un segment.

Théorème 22 – Théorème de point fixe dans un compact

Si K compact et $f : K \to K$ continue telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Remarque 23

L'hypothèse K compact est crucial, si on suppose K complet c'est faux en général. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x \geq 0$. Elle est bien continue, sans point fixe, et vérifie l'hypothèse sur la distance (IAF)

Théorème 24 – Théorème de Heine

Une fonction continue sur un espace compact y est uniformément continue.

Application 25

Les translations sont continues dans les espaces L^p

II.B. Le cas de $\mathbb{R}$ et des fonctions réelles

Théorème 26 – Théorème de Rolle

Application 27

Si la fonction f s'annule en $n+1$ points alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exemple 28

Le fait d'être à valeurs réelles est crucial, en effet l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ pourtant $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais.

Corollaire 29

Inégalité des accroissements finis

III. Compacité dans les espaces-vectoriels normés

III.A. Cas de la dimension finie [Gourdon]

Proposition 30

Pour tout E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les fermés bornés de $(E, \|\|_\infty)$ sont compacts.

Théorème 31 – Equivalence des normes en dimension finie

Corollaire 32

Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les fermés bornés.

Exemple 33

$O_n(\mathbb{R})$ est compact

Corollaire 34

Une application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie vers un espace vectoriel quelconque est continue.

Théorème 35 – Théorème de Riesz

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermé est compacte.

Application 36

Dans $L^2_{2\pi}, (e_n)$ est bornée mais ne cv pas (elle n'est pas de cauchy, car la distance entre 2 termes est $\sqrt{2}$).

III.B. Cas de la dimension infinie : approximation uniforme [Hirsch-Lacombe, Gourdon]

Théorème 37 – Théorème de Weierstrass

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des polynômes est dense sur $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\|_\infty)$

Application 38

Si f est une application continue et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^n dt = 0$ alors $f = 0$.

III.C. En dimension infinie : Ascoli [Hirsch-Lacombe]

Théorème 39 – Théorème d'Ascoli

Soient (E,d) un espace compact et (F,δ) un espace complet. Soit A une partie non vide de $\mathcal{C}(E,F)$ une partie des fonctions continues de E dans F munie de la $\|\|_\infty$. Alors :

A est une partie relativement compact (ie son adhérence est compacte) si, et seulement si :

1. A est équicontinue : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E, d(x,y) \leq \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$
2. $\forall x \in A, A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact

Remarque 40

Si F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie alors la deuxième condition à vérifier ce traduit par $\forall x \in E, A(x)$ est bornée.

III.D. Application pour la régularité de fonctions [Bernis]

Définition 41

Une application entre deux espaces topologiques est propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.

Remarque 42

Dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f propre $\iff \lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Théorème 43 – Hadamard-Levy

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2, f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ $\iff$ f est propre et $Df(x)$ inversible $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 44

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 bornée et de différentielle bornée. Alors $\forall \varepsilon > 0$ assez petit $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - \varepsilon g(x)$ est un C^1-difféomorphisme global. Ainsi une déformation assez petite de l'identité est toujours un C^1-difféomorphisme.

Références :
— Gourdon Analyse,

— Bernis 2EME EDITION 40 dev analyse,

— Hirsch Element d'analyse fonctionnelle,

— Rombaldi Analyse réelle

— El Amrani Fourier

Table des matières

I Notion de compacité **1**
I.A Propriété de Borel-Lebesgue [Gourdon] . . . 1
I.B Propriété de Bolzano-Weierstrass [Gourdon,] . . . 1

II. Compacité et applications continues **1**
II.A. Résultats généraux . . . 1
II.B. Le cas de $\mathbb{R}$ et des fonctions réelles . . . 2

III. Compacité dans les espaces-vectoriels normés **2**
III.A. Cas de la dimension finie . . . 2
III.B. Cas de la dimension infinie : approximation uniforme . . . 2
III.C. En dimension infinie : Ascoli . . . 2
III.D. Application pour la régularité de fonctions . . . 2

Intro : Bien faire la remarque des deux penchants de l'utilisation de la compacité, qui sont de donner d'un côté des résultats d'existence, et de l'autre des propriétés d'uniformité. D'ailleurs, les deux définitions différentes mettent en valeur ce point : celle avec les sous suite donne de l'existence, mais celle par borel lebesgue donne clairement de l'uniformité.

Leçon n° 204 : Connexité. Exemples d'applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit (X, d) un espace métrique.

I Espaces connexes

I.A) Définitions et propositions [Gourdon]

Définition 1

Soit (X, d) un espace métrique, on dit que (X, d) est connexe si :

Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts disjoints non vides

$\iff$ Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides

— $\iff$ Les seules parties ouvertes et fermés de X sont $\emptyset$ et X.

Proposition 2

La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.
(i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$,
alors $(A \cap O_1 = \varnothing$ et $A \subset O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \varnothing$ et $A \subset O_1)$.
(ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \varnothing$,
alors $(A \cap F_1 = \varnothing$ et $A \subset F_2)$ ou $(A \cap F_2 = \varnothing$ et $A \subset F_1)$.

Remarque 3

$\mathbb{R}$ est connexe, un intervalle est connexe. En revanche $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$ car si on considère $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$

Théorème 4

Soit $f : (X, d) \to (X', d')$ une application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.

Remarque 5

$\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6

On note $D = \{0, 1\}$ muni de la distance discrète δ avec $\delta(0, 0) = \delta(1, 1) = 0$ et $\delta(0, 1) = \delta(1, 0) = 1$. Alors :

Un espace métrique (X, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to D$ est constante.

I.B) Propriétés topologiques [Gourdon]

Lemme 7 – Passage à la douane

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie C et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de C.

Proposition 8

Si $A \subset B \subset \overline{A}$ avec A connexe, alors B est connexe.

Proposition 9

L'adhérence d'une partie connexe est encore connexe.

Proposition 10

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (X, d) telle que $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} = \emptyset$.

Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Dans le cadre dénombrable, on a également le résultat suivant :

Proposition 11

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (avec $I = [\![0, p]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que $\forall i \in I, i \neq 0, C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Remarque 12

En général une intersection de connexes n'est pas toujours connexe, en effet sur $\mathbb{R}^2$. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ et $B = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$, alors A et B sont connexes pourtant $A \cap B$ n'est pas connexe (cf dessin). De plus l'union quelconque de deux connexes n'est pas forcément connexe : prendre l'union de deux boules.

Proposition 13

Soient $n \in \mathbb{N}$ et$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ est connexe si et seulement si X_i est connexe pour tout i.

I.C. Composantes connexes [Gourdon]

Définition 14

Soit (X, d) un espace métrique, on considère la relation d'équivalence :
$x \mathcal{R} y \iff (\exists C$ connexe de X tel que $x \in C$ et $y \in C)$

Définition 15

On appelle composantes connexes de (X, d) les classes d'équivalences pour la relation $\mathcal{R}$.
Par définition elles forment une partition de X.

Proposition 16

Les composantes connexes de X sont des fermés de X. S'il y a un nombre fini de composantes connexes, elles sont alors ouvertes comme complémentaires d'une réunion finie de fermés de X.

Proposition 17

(X, d) est connexe si et seulement si il admet une unique composante connexe.

Théorème 18

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

I.D. Connexité par arcs [Gourdon]

Définition 19

Soit (X, d) un espace métrique. On appelle chemin de X toute application $\gamma : [0, 1] \to (X, d)$ continue. L'image $\gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc et $\gamma(1)$ l'extrémité.

Définition 20

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in X^2$, il existe un arc tracé dans X reliant x et y.

Théorème 21

Un espace connexe par arcs est connexe.

Remarque 22

La réciproque est fausse en général.

Définition 23

Soient $(x, y) \in X^2$. On appelle segment d'extrémité a et b l'ensemble $[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\}$.

Définition 24

On appelle ligne brisée (ou ligne polygonale) de X joignant deux points a et b de X tout ensemble de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} [x_{i-1}, x_i]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$ et $x_n = b$, et pour tout i, $x_i \in X$.

Définition 25

Une partie A de X est dite connexe par lignes brisées si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b.

Remarque 26

Une ligne brisée étant un chemin continue par concaténation des chemins, on en déduit qu'un ensemble connexe par ligne brisée est un ensemble connexe par arc.

Exemple 27

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe par arcs brisées donc connexe par arc donc est connexe

Théorème 28

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie ouverte $\Omega \subset E$ est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisés.

II. Applications en analyse

II.A. Fonctions à valeurs réelles/ Calcul diff[PGCD, Gourdon, Bernis]

Théorème 29 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 30 – Théorème de Darboux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Proposition 31

Soit U un ouvert connexe de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ tel que $df(a) = 0$ $\forall a \in U$ alors f est constante sur U.

Théorème 32

Théorème de Cauchy-Lipschitz : unicité de la solution maximale

Théorème 33 – Théorème d'Hadamard-Levy

.A) II.B. Analyse complexe [Tauvel, Objectif Agreg]

Définition 34

Soit γ un chemin tracé dans U (ie $\gamma : [a, b] \to U$ continu et C^1 par morceaux). On définit l'intégrale de f sur γ par $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$, ainsi que la longueur de γ par $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$

Exemple 35

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $R > 0$ et soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + Re^{2\pi it}$. Alors $\int_\gamma (z - z_0)^n dz = 2i\pi$ si $n = -1$ et 0 sinon.

Théorème 36

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admet une $\mathbb{C}$-primitive si et seulement $\forall \gamma$ chemin fermé tracé dans Ω, on a $\int_\gamma f = 0$

Théorème 37 – Théorème de Cauchy 1

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur Ω avec $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\}))$ alors pour tout chemin tracé dans Ω fermé alors $\int_\gamma f = 0$ et f admet une primitive dans Ω.

Théorème 38

Soit γ un chemin fermé dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, $z \in \Omega \setminus Im(\gamma)$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors :

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Théorème 39 – Analycité des fonctions holomorphes

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :
(i) On a $f \in \mathcal{A}(U)$, et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$.
(ii) Si U est convexe, et si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \operatorname{im} \gamma$, on a

$$f^{(n)}(a) \operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 40

En particulier, une fonction holomorphe est de classe C^∞

Proposition 41 – Principe des zéros isolés

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés.

Proposition 42 – Principe du maximum

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,si $|f|$ admet un maximum local dans Ω alors f est constante.

Théorème 43 – Théorème de Liouville

Soit f une fonction entière bornée alors f est constante.

Théorème 44 – Théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 45
Prolongement méromorphique de la fonction gamma

III. En algèbre

III.A. Dans les espaces de matrices [Rombaldi]

Proposition 46
$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs.

Proposition 47
$O_n(\mathbb{R})$ admet aussi deux composantes connexes ; à savoir $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$

Proposition 48
$SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Théorème 49
$SO_3(\mathbb{R})$ est simple

Références :

- GOURDON Analyse,
- TAUVEL Analyse complexe,
- Objectif agreg,
- PGCD,
- BERNIS 40 dev agreg analyse,
- Rombaldi Algèbre
- Queffelec Topologie

Table des matières

I Espaces connexes **1**
I.A Définitions et propositions [Gourdon] . . . 1
I.B Propriétés topologiques [Gourdon] . . . 1
I.C. Composantes connexes . . . 1
I.D. Connexité par arcs . . . 1

II. Applications en analyse **2**
II.A. Fonctions à valeurs réelles/ Calcul diff . . . 2
.A II.B. Analyse complexe [Tauvel, Objectif Agreg] . . . 2
II.B. Analyse complexe . . . 2

III. En algèbre **3**
III.A. Dans les espaces de matrices . . . 3

Intro : Généralisation de la récurrence sur $\mathbb{R}$: Parfois on peut montrer que si une propriété est vraie sur un ensemble, elle est aussi vraie sur un ensemble un petit peu plus grand. Dans l'absolu, ne permet pas de conclure que vrai partout, car taille du bout de terrain qu'on gagne peut tendre vers 0. Mais en fait dans le cadre de la connexité c'est magique, et ça marche. En fait c'est parce que le fait de pouvoir gratter un peu montre que l'ens ou la choses est vrai est ouvert, et on peut faire en sorte que soit fermé, et non vide, donc c'est tout l'ensemble.

Leçon n° 205 : Espaces complets. Applications

Piroutet Alban

28 juillet 2026

(X, d) désigne un espace métrique non vide

I Généralités sur la complétude

I.A) Suites de Cauchy [Gourdon]

Définition 1 – Suites de Cauchy

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de **Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n_0,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Proposition 2

- Toute suite convergente est de **Cauchy**.
- Une suite de Cauchy est bornée et $\sup_{p,q} d(u_p, u_q) < +\infty$.
- Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence l converge vers l.

Définition 3

X est dit complet si toute suite de CAUCHY de X est convergente.

Exemple 4

$(\mathbb{R}, |.|)$ est complet tandis que $(\mathbb{Q}, |.|)$ ne l'est pas (la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.

I.B) Premières propriétés [Gourdon]

Théorème 5

Il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une isométrie $i : (X, d) \to (\hat{X}, \hat{d})$ d'image dense.
De plus, si $(\hat{X}_0, \hat{d}_0)$ et i_0 conviennent également, alors il existe une isométrie bijective $\varphi : \hat{X} \to \hat{X}_0$ telle que $\varphi \circ i = i_0$.

Exemple 6

$\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pour la distance usuelle (on construit en fait $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$),
$\hat{P} = C([0, 1])$ pour la norme uniforme, où P est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ [**Théorème de Weierstrass**].

Proposition 7

Si (X, d) est complet et $A \subset X$, alors (A, d) est complet si et seulement si A est fermé dans X.

Proposition 8

Si $((X_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$ sont des espaces métriques, alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est complet pour la distance produit si et seulement si tous les (X_i, d_i) sont complets.
En particulier, un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème 9 – Théorème des fermés emboîtés

Si X est complet, alors pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Proposition 10

Un métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.

II. Exemples d'espaces vectoriels normés complets

II.A. Espaces de Banach, exemple des applications linéaires continues [Gourdon]

Définition 11

Un espace vectoriel normé complet est un espace de BANACH

Proposition 12

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace **Banach** si et seulement si toute série à termes dans E absolument convergente est convergente.

Soit $(E, |||)$ un espace de Banach

Exemple 13

$(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ et $(C_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de **Banach**, et donc $(C(K, E), \|\cdot\|_\infty)$ pour K compact aussi.

Proposition 14

Si F est un espace de **Banach**, $L(E, F)$ est complet pour $\|f\| = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F$.
Ainsi, le dual topologique d'un espace vectoriel normé est toujours complet.

Application 15

Si $u \in L(E)$ est tel que $\|u\| \leq 1$, alors $(\mathrm{Id} - u) \in GL(E)$ et son inverse est $\sum_{n\geq 0} u^n$.
On en déduit que $GL(E)$ est un ouvert de $L(E)$.

II.B. Espaces L^p [Théorie de l'intégration, Analyse fonctionnelle]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 16

Pour $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p = (\int_E |f|^p \, d\mu)^{1/p}$ lorsque p est fini, et $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid |f| \leq M \ \mu\text{-p.p.}\}$.
On définit l'espace vectoriel : $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$.

Théorème 17 – Inégalité de Hölder

Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Corollaire 18 – Inégalité de Minkowski

Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 19

On note $L^p(E,\mathcal{A},\mu) = L^p(E,\mathcal{A},\mu)/\{\|\cdot\|_p = 0\}$ (ou $L^p(E)$, ou simplement L^p) l'ensemble des fonctions de $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.
L'application $\|\cdot\|_p$ passe au quotient et définit ainsi une application sur $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$, notée également $\|\cdot\|_p$ par abus.

Corollaire 20

$\|\cdot\|_p$ est une norme et l'espace $(L^p(E),\|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 21

Cas où $E=\mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage.
Si p est fini, on note l^p l'espace

$$l^p = L^p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\}.$$

De même, $l^\infty = L^\infty$ est l'espace des suites bornées.

Théorème 22 – Théorème de Riesz-Ficher

L'espace $(L^p(E,\mathcal{A},\mu),\|\cdot\|_p)$ est un espace de **Banach**.

Corollaire 23

Toute suite convergente de L^p admet une sous-suite qui converge μ-p.p.

II.C. Le cas des espaces de Hilbert [Gourdon Analyse, Brezis Analyse fonctionnelle, Objectif Agreg]

Définition 24

H est un espace préhilbertien si c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est un espace de **Hilbert** s'il est complet pour la norme issue du produit scalaire.

Remarque 25

Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme dérive d'un produit scalaire et est donc une norme hilbertienne. C'est un critère pratique : $(C([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de **Hilbert**, par exemple.

Exemple 26

$L^2(E,\mathcal{A},\mu)$ est un espace de **Hilbert** pour tout espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$.

Théorème 27 – Projection sur un convexe fermé

Soit C un convexe fermé d'un espace de **Hilbert** H. Alors :

$$\forall x\in H,\ \exists! p\in C \mid \|x-p\| = d(x,C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant

$$\forall c\in C,\ \langle x-p \mid c-p\rangle \le 0.$$

Remarque 28

On a en fait juste besoin de C complet et H préhilbertien

Corollaire 29

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F\oplus F^\perp$.

Exemple 30

Contre-exemples :

- Lorsque F n'est pas fermé : prendre $H=l^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang. Alors $F^\perp=\{0\}$ mais $H\neq F$.
- Lorsque H est seulement un espace de **Banach** : $E=(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$. Les points $\{(x,0)\mid -1\le x\le 1\}$ minimisent la distance de $(0,1)$ à $\mathrm{Vect}((1,0))$.

Application 31

Existence et unicité de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire

Application 32

Soit $T\in L(H)$. Alors il existe un unique opérateur $U\in L(H)$ tel que :

$$\forall x,y\in H,\ \langle T(x)\mid y\rangle = \langle x\mid U(y)\rangle.$$

Théorème 33 – Théorème de Riesz-Fréchet

Soit H un espace de **Hilbert**. Alors pour toute application $\phi\in H^0$, il existe un unique $f\in H$ tel que

$$\forall v\in H,\ \phi(v) = \langle f\mid v\rangle.$$

De plus, l'application $\phi\mapsto f$ est une isométrie : $\|f\|_H = \|\phi\|_{H^0}$.

Théorème 34

Théorème de Shannon

III.Utilisation de la complétude

III.A. Prolongement d'applications [Gourdon, El Amrani]

[Gourdon]

Théorème 35

Soient E et F deux espaces métriques, D une partie dense de E. Si F est complet, alors toute application uniformément continue de D dans F admet un unique prolongement continu sur E. Ce prolongement est de plus uniformément continu.

Corollaire 36

Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E et F un espace de **Banach**. Alors toute application linéaire continue de D dans F a un unique prolongement linéaire continu sur E.

Application 37

Prolongement de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$.

III.B. Théorèmes de point fixe [Gourdon]

Théorème 38 – Théorème du point fixe de Picard

Soit (X,d) un espace métrique complet et $\phi: X\to X$ une application k-contractante pour un $k\in(0,1)$. Alors ϕ admet un unique point fixe.
De plus, toute suite à valeurs dans X définie par $u_{n+1}=\phi(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de ϕ.

Corollaire 39

Le résultat reste valable si l'on suppose seulement que l'une des itérées de ϕ est contractante.

Remarque 40

Contre-exemple lorsque X n'est pas complet : $X = (0,1]$ et $\phi : x \mapsto x/2$.
Lorsque l'on a seulement $d(\phi(x),\phi(y)) < d(x,y)$, le résultat est faux dans le cas général ($\phi : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$), mais est vrai si X est compact.

Corollaire 41

Soit Λ un espace métrique et $\phi : X \times \Lambda \to X$ une application continue et uniformément contractante par rapport à Λ, c'est-à-dire il existe $k \in (0,1)$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\phi(\cdot,\lambda)$ est k-contractante.
Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $\phi(\cdot,\lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

PGCD p 167

Théorème 42 – Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, globalement lipschitzienne en la seconde variable, c'est-à-dire :

$$\forall K \subset I \text{ compact}, \ \exists L > 0 \text{ tel que } \forall t \in K, \ \forall y,z \in \mathbb{R}^m, \ \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L\|y-z\|.$$

Alors pour $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Exemple 43

Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution $Y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ telle que

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

III.C. Autour du théorème de Baire [Gourdon]

[Gourdon, Analyse fonctionelle, Analyse réelle et complexe]

Théorème 44 – Théorème de Baire

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses d'un espace complet E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est également dense.

Application 45

Un espace de **Banach** est de dimension finie ou non dénombrable. Par exemple, $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Théorème 46 – Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de **Banach** et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $L_c(E,F)$ simplement bornée, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \ \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty.$$

Application 47

Existence d'une fonction continue 2π-périodique telle que sa série de FOURIER diverge en 0.

Application 48

Soient E, E_1 des espaces de **Banach** et E_2, F des espaces vectoriels normés.
- Soit $f : E \to F$ limite simple d'une famille d'applications de $L_c(E,F)$. Alors $f \in L_c(E,F)$.
- Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire telle que les applications partielles soient continues. Alors $B \in L_c(E_1 \times E_2, F)$.

Théorème 49 – Théorème de l'application ouverte

Une application linéaire continue surjective entre espaces de BANACH est ouverte

Corollaire 50

Une application linéaire continue bijective entre espaces de BANACH est d'inverse continue.

Application 51

Si un espace de BANACH est muni de 2 normes dont l'une est plus fine que l'autre, alors elles sont équivalentes.

Références :

— Gourdon,

— Objectif Agreg,

— Théorie de l'intégration Briane,

— Analyse fonctionnelle Brezis,

— Les contre-exemples en mathématiques,

— PGCD,

— Rudin Analyse complexe

— El Amrani Fourier

Table des matières

I Généralités sur la complétude **1**
I.A Suites de Cauchy [Gourdon] . . . 1
I.B Premières propriétés [Gourdon] . . . 1

II. Exemples d'espaces vectoriels normés complets **1**
II.A. Espaces de Banach, exemple des applications linéaires continues . . . 1
II.B. Espaces L^p . . . 1
II.C. Le cas des espaces de Hilbert . . . 2

III.Utilisation de la complétude **2**
III.A. Prolongement d'applications . . . 2
III.B. Théorèmes de point fixe . . . 2
III.C. Autour du théorème de Baire . . . 3

Intro :

Les espaces complets fournissent un cadre de travail très intéressant vis à vis de l'existence de certains objets ou de la convergence de suites ou séries. En effet, il est en général difficile de prouver qu'une suite converge en utilisant la définition car cela demande au préalable d'avoir déterminé cette-dernière, ce qui n'est , en général, pas évident. Par contre, étant-donnée une suite, on peut plus facilement montrer qu'elle est de Cauchy. De plus, travailler dans ces espaces assure donc de nombreux résultats d'existence dont nous allons traiter durant de cet oral. Enfin, tout espace métrique peut être complété en un espace complet, dans la pratique on peut facilement se placer dans ce contexte.

Leçon n° 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Topologie en dimension finie

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de norme $\|\|\|_E$.

I.A) Dans les evn [Gourdon]

Définition 1 – Normes équivalentes

Lemme 2
Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel les fermés bornés de $(E, \|\|\|_{\infty,E})$ sont compacts

Théorème 3
En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Proposition 4
Toutes les définitions équivalentes de la continuité d'une application linéaire.

Corollaire 5
Toute application linéaire d'espace vectoriel de dimension finie sur un autre espace vectoriel est automatiquement continue (seul le départ compte)

Remarque 6
C'est faux en dimension infinie avec $P \mapsto P'$ avec la norme infinie sur $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 7
Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel quelconque est fermé.

Application 8
$\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$

Corollaire 9
Tout espace de dimension finie est complet.

Théorème 10 – Théorème de Riesz

Application 11
Existence de l'adjoint + définition du gradient (cf calcul diff)

.A) Compacité

Corollaire 12
Les compacts en dimension finie sont les fermés bornés.

Exemple 13
Les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts, $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 14 – Théorème de Riesz
Soit E un $\mathbb{K}$-evn alors :

$$E \text{ est de dimension finie} \iff B_{f,E}(0,1) \text{ est compact}$$

Proposition 15
En dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

II. En calcul différentiel

Les théorèmes de cette partie sont vrais aussi dans un Banach ! Ils ont leur place dans la leçon seulement parce que trop difficile de montrer que quelque chose est inversible en dimension infinie (on a juste le th d'isomorphisme de Banach). En dimension finie, c'est facile, juste à calculer un déterminant. Pour les extrema liés c'est pareil, c'est beaucoup plus compliqué en dimension infinie.

II.A. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [PGCD, Donato, Objectif Agreg]

Dans toute la suite U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$

Définition 16
Application différentiable et différentielle

Remarque 17
En dimension finie, la différentiabilité ne dépend pas de la norme.

Définition 18
Dérivabilité selon un vecteur + dérivées partielles

Théorème 19
Si les dérivées partielles existent et sont continues alors la fonction est de classe C^1

Définition 20
Matrice Jacobienne

Proposition 21
Règle de la chaîne

Définition 22
C^1-difféomorphisme

Théorème 23
Changement de variable

Application 24
Intégrale de Gauss

Théorème 25 – Théorème d'inversion locale

Théorème 26 – Lemme de Morse

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^3 tel que $0 \in U$, $df_0 = 0$, $d^2 f_0$ soit non dégénérée. On note $(p, n-p)$ la signature de $d^2 f_0$. Alors, à un C^1-difféomorphisme près, on a

$$f(x) = f(0) + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

Définition 27

Fonction propre

Théorème 28 – Hadamard-Levy

Théorème 29 – Fonction implicite

Application 30

Localisation et asymptotique des racines d'un polynôme.

II.B. Optimisation [Donato, Objectif Agreg, PGCD]

Définition 31

Différentielles partielles secondes

Théorème 32 – Théorème de Schwarz

Définition 33

Matrice Hessienne, elle est symétrique

Théorème 34

Si f est de classe C^2 CN et CS pour avoir un minimum local.

Théorème 35 – Théorème des extramas liés

Application 36

Optimisation du volume d'un parallélépipède à surface fixée.

III. Applications

III.A. Projection dans un préhilbertien et série de Fourier [Hirsch-Lacombe, El Amrani]

L'idée ici est d'approximer un espace de dimension infinie par un espace de dimension finie, on projette donc ! On fait ça pour les bases hilbertiennes, on fait tout comme en dimension finie et on passe à la limite !

Définition 37

Espace préhilbertien + espace de Hilbert

Remarque 38

En dimension finie, un espace préhilbertien est un espace de Hilbert

Théorème 39 – Théorème de projection sur un convexe fermé non vide

Corollaire 40

La projection est continue (même contractante) et lorsqu'on projette sur un sous-espace vectoriel fermé alors elle est linéaire.

Proposition 41

Inégalité de Bessel +Parseval

Application 42

Application à la théorie de Fourier

Théorème 43

Déterminant de Gram

III.B. En équations différentielles [Berthelin]

On considère les équations du type $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$

Théorème 44 – Théorème de Cauchy-linéaire

Proposition 45

L'espace des solutions est un sous-espace affine de dimension n

Définition 46

Définition du Wronskien

Proposition 47

Identité d'Abel : Equation différentielle vérifiée par le Wronskien : $W'(t) = Tr(A(t))W(t)$ et $W(0) = 1$.

Application 48

$\det(e^{tA}) = e^{tTr(A)}$

Proposition 49

Matrice fondamentale et exponentielle

Proposition 50

Calcul de l'exponentielle d'une matrice + matrice de Jordan.

Théorème 51

Théorème de stabilité.

III.C. En probabilité

Théorème 52 – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

On considère le modèle suivant. Soit $d \geq 1$ un entier et (u_i) la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On pose $S_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d$, le k-ième pas est défini par $e_k \in \{\pm u_i : 1 \leq i \leq d\} = A$ et $P(e_k = u_i) = P(e_k = -u_i) = \frac{1}{2d}$ pour tout i. Les e_k sont des variables aléatoires iid de sorte que $P(e_1 = \varepsilon_1, \ldots, e_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{(2d)^k}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n e_k$ pour $n \geq 1$.
Alors si $d \leq 2$,

$$P(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1.$$

Si $d \geq 3$, alors

$$P\big(\lim |S_n| = +\infty\big) = 1.$$

Références :

— Gourdon Analyse et Algèbre,

— PGCD,

— Rudin Analyse réelle et complexe,

— El Amrani Fourier

— Bernis

— Donato Calcul diff pour la license 3

— Berthelin

— Objectif Agreg

Connaitre par coeur le dev de la marche aléatoire

Table des matières

I Topologie en dimension finie **1**
I.A Dans les evn [Gourdon] . . . 1
.A Compacité . . . 1

II. En calcul différentiel **1**
II.A. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . 1
II.B. Optimisation . . . 2

III. Applications **2**
III.A. Projection dans un préhilbertien et série de Fourier . . . 2
III.B. En équations différentielles . . . 2
III.C. En probabilité . . . 2

Intro : La dimension finie fixe un cadre agréable sur lequel travailler, les normes sont équivalentes, on connaît exactement les compacts (facile de montrer qu'un ensemble est compact –> utile pour avoir de la convergence).

La dimension finie permet d'introduire des outils d'algèbre puissant tels que le déterminant ou les matrices. LE TIL et TIF ont leur place malgré que les théorèmes restent vrais dans les espaces de Banach mais prouver que quelque chose est inversible demeure une tâche compliquée (on a que le théorème d'isomorphisme de Banach) alors qu'en dimension finie, il s'agit juste d'un calcul de déterminant.

De plus l'approche habituelle est d'approximer un espace de dimension infinie par des espaces de dimension finie et après on passe à la limite : c'est exactement ce que l'on fait pour les espaces de Hilbert !

Leçon 208 :ESPACES VECTORIELS NORMÉS, APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES. EXEMPLES

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

I Normes et applications linéaires continues sur un espace vectoriel

I.A) Norme [Gourdon, PGCD]

Définition 1
Définition d'une norme et d'un evn.

Exemple 2
$(\mathbb{K}, |.|), \mathbb{R}^n$ et ses normes p et $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ un evn.

Proposition 3
$L^p(\mu)$ est un evn pour la norme $\|\|_p$.

Définition 4
[Normes équivalentes]

Exemple 5
$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad (\forall x \in \mathbb{K}^n)$ donc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
En revanche dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ $\|\|_1$ et $\|\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

I.B) Applications linéaires continues [Gourdon]

Théorème 6
Différentes équivalences pour être linéaire continue

Exemple 7
La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

Remarque 8
Pour montrer qu'une application linéaire est continue, dans la plupart des cas, on montre qu'elle est lipschtzienne

Exemple 9
La continuité dépend de la norme, par exemple $\delta : f \mapsto f(0)$ avec $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

Définition 10
Ensemble des applications linéaires continues entre deux evns + définition de la norme subordonnée.

Proposition 11
La norme subordonnée est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 12
La continuité est préservée par équivalence des normes sur l'ensemble de départ

Proposition 13
Soit $f \in E^*$ alors f continue $\iff \ker(f)$ est fermé.

Remarque 14
En particulier H est un hyperplan fermé si c'est le noyau d'une forme linéaire continue.

II. Cas de la dimension finie

II.A. Equivalence des normes [Gourdon, PGCD]

Proposition 15
Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn alors $\|.\|_E$ est continue.

Théorème 16
En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 17
La réciproque est vraie.

Corollaire 18
Toute application linéaire définie sur un evn de dimension finie dans un evn quelconque est continue.

Remarque 19
C'est faux en dimension infinie avec $P \to P'$ et la norme infinie sur $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 20
Tout espace de dimension finie est complet.

Corollaire 21
Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

Application 22
L'exponentielle matricielle est un polynôme en la matrice : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$

Corollaire 23
En dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.

Exemple 24
$O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 25 – Théorème de Riesz
Soit $(E, \|.\|_E)$, on a :

$$E \text{ de dimension finie} \iff B_f(0,1) \text{ est compacte}$$

Application 26
Les compacts en dimension infinie sont d'intérieur vide.

II.B. Normes sur les espaces de matrices [Gourdon, Allaire]

Définition 27
Normes matricielles

Proposition 28
Les normées subordonnées $||.||_{p,q}$ sont des normes matricielles

Proposition 29
Calcul de normes subordonnées

Application 30
Utile en analyse numérique.

III. Cas de la dimension infinie

III.A. Les espaces de Banach [Gourdon, Hirsch, Brézis]

Définition 31
Espace de Banach

Théorème 32
Tout evn de dimension finie est de Banach, $(C^0([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$ est de Banach.

Proposition 33
Si F de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de Banach.

Théorème 34 – Riesz-Fisher
$L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 35
E est un espace de Banach $\iff$ toute série absolument convergente converge.

Application 36
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, alors $u \in GL(E)$. De plus $GL(E)$ est ouvert.

Application 37
L'exponentielle matricielle est bien définie

Théorème 38 – Isomorphisme de Banach
Si E de Banach alors les applications linéaires continues bijectives sont des homéomorphismes.

Proposition 39
Si $||.||_1 \sim ||.||_2$ et $(E,||.||_1)$ est complet alors $(E,||.||_2)$ est complet.

Théorème 40
Extension par densité d'applications linéaires continues

Application 41
Extension de la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 42 – Théorème de Banach-Steinhaus
Soit E un espace de **Banach** et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $L_c(E,F)$ simplement bornée, c'est-à-dire

$$\forall x \in E,\ \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty.$$

Application 43
Divergence d'une série de Fourier en 0.

III.B. Espaces de Hilbert [Brézis, Hirsch-Lacombe]

Définition 44
Espaces de Hilbert : espace préhilbertien complet.

Exemple 45
$L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert et l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques aussi.

Remarque 46
La norme dérive d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Théorème 47 – Théorème de projection sur un convexe fermé
Soit C un convexe fermé d'un espace de **Hilbert** H. Alors :

$$\forall x \in H,\ \exists!\, p \in C \mid \|x-p\| = d(x,C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant

$$\forall c \in C,\ \langle x-p \mid c-p\rangle \leq 0.$$

Corollaire 48
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors p_F est linéaire continue de plus $p_F(x)$ est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

Corollaire 49
Pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H, on a $H = F \bigoplus F^\perp$.

De plus on a la caractérisation suivante : F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$

Théorème 50 – Théorème de représentation de Riesz
Soit H un espace de Hilbert et u forme linéaire continue définie sur H . Alors il existe un vecteur $a \in H$ tel que $\forall x \in H, u(x) = (x,a)$ avec $\|u\| = \|a\|$

Corollaire 51
Existence du gradient + existence de l'adjoint dans un Hilbert.

Références :

— Gourdon Analyse,

— PGCD,

— Allaire Analyse numérique,

— Brézis, Hirsch Element d'analyse fonctionelle

— El Amrani Fourier

Table des matières

I Normes et applications linéaires continues sur un espace vectoriel **1**
I.A Norme [Gourdon, PGCD] . . . 1
I.B Applications linéaires continues [Gourdon] . . . 1

II. Cas de la dimension finie **1**
II.A. Equivalence des normes . . . 1
II.B. Normes sur les espaces de matrices . . . 2

III. Cas de la dimension infinie **2**
III.A. Les espaces de Banach . . . 2
III.B. Espaces de Hilbert . . . 2

Intro : Cette leçon est consacrée aux espaces vectoriels normés et aux applications linéaires continues. Ces objets constituent le cadre de base de l'analyse fonctionnelle et permettent d'étudier des espaces de fonctions, qui sont généralement de dimension infinie.

L'enjeu principal est de comprendre quelles propriétés de l'analyse en dimension finie subsistent en dimension infinie. En dimension finie, de nombreux résultats reposent sur d'excellentes propriétés topologiques, comme l'équivalence des normes ou la compacité des fermés bornés. En dimension infinie, ces propriétés disparaissent souvent ; il devient alors nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires, comme la complétude, qui conduisent aux notions d'espaces de Banach et de Hilbert.

Je commence par introduire les notions de norme, d'équivalence de normes et de continuité des applications linéaires. Cela permet notamment de mettre en évidence le lien étroit entre la topologie et la géométrie de l'espace.

La deuxième partie est consacrée à la dimension finie. C'est un cadre particulièrement favorable : toutes les normes y sont équivalentes, les applications linéaires sont automatiquement continues, les espaces sont complets et les compacts sont exactement les fermés bornés. Cette étude permet de comprendre quelles propriétés sont spécifiques à la dimension finie.

Dans la troisième partie, je passe à la dimension infinie, où apparaissent de nouveaux phénomènes. J'introduis d'abord les espaces de Banach, qui fournissent le cadre minimal pour obtenir de grands théorèmes d'analyse fonctionnelle comme Banach-Steinhaus ou le théorème de l'application ouverte. J'aborde ensuite les espaces de Hilbert, qui possèdent une structure géométrique plus riche grâce au produit scalaire. Cela conduit aux théorèmes de projection orthogonale et de représentation de Riesz, qui jouent un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment l'analyse, les équations aux dérivées partielles et l'optimisation.

Leçon n° 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Approximation par des polynômes

I.A) Interpolation [Demailly]

Théorème 1 – Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soient $f : [a,b] \to$ continue $\mathbb{R}$, $(x_0, \dots, x_n)$ $(n+1)$ points deux à deux distintcs. On appelle polynôme d'interpolation (de Lagrange) de f aux points $x_0, \dots, x_n$ le polynôme $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X)$ où $l_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.
C'est l'unique polynôme ¨P de degré n qui vérifie $\forall i \in [\![0,n]\!], P(x_i) = f(x_i)$. On le note p_n.

Théorème 2

On suppose f $(n+1)-$fois dérivable sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe un point $\xi_x \in]\min(x,x_i), \max(x,x_i)[$ tel que :

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

où $\pi_{n+1}(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$

Corollaire 3

$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|\pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$

Remarque 4

L'erreur dépend des dérivées (ie si la fonction oscille trop vite) et de la répartition des points.

Remarque 5

Phénomène de Runge : Exemple de fonction analytique pour laquelle les polynômes d'interpolation ne converge pas. (cf annexe)

Si t'es chaud rajoute polynôme de meilleur approximation.

I.B. Approximation locale de fonctions régulières [Gourdon, Analyse + Rombaldi élément d'analyse réelle]

Théorème 6 – Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. Alors pour $a \in I$:

$$f(a+h) =_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$$

Exemple 7

On a les développements limités suivants : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ et $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

Théorème 8 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach E. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Théorème 9 – Théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que pour tout entier k, $f^{(2k)} \geq 0$ sur $]-a,a[$. Alors f admet un développement en série entière sur $]-a,a[$.

I.C. Densité dans l'espace des fonctions continues [Gourdon]

Théorème 10

$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(C([a,b],\mathbb{C}), \|\|_\infty)$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Application 11

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

Application 12

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f(t) dt$ existe et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$. Alors f est nulle.

Exemple 13

Le théorème de Weierstrass est faux si l'intervalle n'est plus borné, en effet si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynôme alors f est un polynôme.

II. Approximation par convolution [BP Briane-Pagès théorie de l'intégration 4eme ed+ El Amrani]

Proposition 14

Pour $p \in [1, +\infty[$ et pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a $\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$. Ainsi si $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p$, $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Remarque 15

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue est crucial, pour $\mu = \delta_0, \tau_a f$ converge vers f dans L^p si et seulement si f est continue en 0.

Proposition 16 – Convolution $L^p - L^q$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p, q \in [1, +\infty]$. Alors :

1. $f * g$ est définie en tout de $\mathbb{R}^d$. En outre $f * g$ est uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$. Enfin l'application $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire
2. Si $1 < p, q < +\infty$ alors $\lim_{\|x\| \to +\infty} f * g(x) = 0$

Proposition 17 – Régularisation par convolution

Soient φ une fonction de classe C^n à support compact, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et f une fonction L^1_{loc} alors la fonction $f * \varphi$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ et de plus $f * \varphi$ est de classe C^n. De plus $(f * \varphi)^{(k)} = f * \varphi^{(k)}$

Proposition 18

$(L^1(\mathbb{R}), +, \times, *)$ est une algèbre de Banach commutative sans unité.

Définition 19

Une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si :

1. Pour tout $n \geq 1, \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda = 1$
2. $\sup_{n \geq 1} \int |\alpha_n| d\lambda < +\infty$,
3. $\forall \varepsilon > 0, \lim_n \int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n| d\lambda = 0$

Exemple 20

Si $\varphi \in C^\infty_c$ d'intégrale 1 alors $\varphi_n = n\varphi(n \times .)$ est une approximation de l'unité

Proposition 21

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite d'approximation de l'unité. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ et } f * \alpha_n \xrightarrow{\|\|_p} f$$

Définition 22

Une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite régularisante si :

1. la suite $(\alpha_n)_n$ est une approximation de l'unité.
2. $\forall n \geq 1, \alpha_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

Proposition 23

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $C^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\|_p$.
$C^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est dense dans $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\|_\infty$.

Application 24

L'espace de Schwarzt est dense dans L^2 car est contenu dans C^∞_c lui même dense dans L^2.

Application 25 – Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ alors $\lim_{|\xi| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$

Application 26

La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ est injective.

III. Bases hilbertiennes de fonctions régulières [El Amrani + Briane-Pagès]

Définition 27

Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodiques qui appartiennent à $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Proposition 28

$(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Définition 29 – Coefficients de Fourier

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}$

Remarque 30

Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Proposition 31

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ alors $\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$.

Définition 32

On appelle série trigonométrique toute somme de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$. On définit la suite des sommes partielles symétriques $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$

Définition 33

La fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ est appelée le noyau de Dirichlet d'ordre N.

La fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelée le noyau de Fejér d'ordre N.

Proposition 34

1. D_N est une fonction paire, 2π-périodique et vérifie $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1$
2. D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$
3. Pour tout $f \in L^1_{2\pi}, S_N(f) = f * D_N$
4. $K_N = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) e_n$ et $\sigma_N(f) = f * \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) c_n(f) e_n$
5. $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

Théorème 35 – Théorème de Fejér

— Si f est une fonction continue 2π-périodique, alors :

1. $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
2. $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$

— Si $f \in L^p_{2\pi}, p \in [1, +\infty[$, alors :

1. $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$
2. $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Remarque 36

Nouvelle démonstration du théorème de densité des polynômes trigonométriques.

Théorème 37 – Parceval L^2

Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors :

1. $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique : $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$,
2. Formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$

Théorème 38 – Théorème de Dirichlet

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppo que :

1. f admet une limite finie à droite et à gauche en x_0
2. f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x_0.

Alors $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Application 39

Calcul des $\zeta(2k)$

Proposition 40

Décroissance des coefficients de Fourier selon la régularité.

IV. Application en probabilité [Appel]

Définition 41

Toutes les convergences

Lemme 42

Lemme pour LEVY

Théorème 43

Théorème de Levy + TCL

Références :

— Briane/Pagès Théorie de l'intégration 7eme ed,

— El Amrani Fourier,

— Gourdon Analyse,

— Rombaldi éléments d'analyse réelle,

— Analyse numérique et équations différentielles Demailly,

— Bernis 40 dév pour l'agreg analyse

— Walter Appel

Table des matières

I Approximation par des polynômes **1**

I.A Interpolation [Demailly] 1

I.B. Approximation locale de fonctions régulières 1

I.C. Densité dans l'espace des fonctions continues 1

II. Approximation par convolution **1**

III. Bases hilbertiennes de fonctions régulières **2**

IV. Application en probabilité **3**

Intro : Cette leçon est consacrée à l'approximation des fonctions par des fonctions plus régulières. Cette problématique est omniprésente en analyse : les fonctions rencontrées en pratique sont souvent peu régulières, tandis que les outils théoriques sont plus efficaces sur des fonctions polynomiales, lisses ou analytiques.

L'objectif est donc de remplacer une fonction donnée par une fonction plus simple, tout en contrôlant l'erreur commise. La notion de convergence choisie joue alors un rôle essentiel : convergence uniforme, convergence dans (L^p), convergence ponctuelle ou en moyenne quadratique.

La première partie présente l'approximation polynomiale. Les polynômes constituent les fonctions régulières les plus élémentaires et interviennent à travers l'interpolation de Lagrange, les formules de Taylor et le théorème de Weierstrass, qui affirme la densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues sur un segment. Pour représenter une fonction, on a un nombre fini de place mémoire !

La deuxième partie aborde l'approximation par convolution. Grâce aux approximations de l'unité, toute fonction de (L^p) peut être approchée par des fonctions (C^∞), ce qui fournit un outil fondamental en analyse fonctionnelle.

Enfin, la troisième partie utilise les séries de Fourier. Les polynômes trigonométriques permettent d'approcher les fonctions périodiques et conduisent aux théorèmes de Fejér, de Parseval ou encore de Dirichlet. Cette approche relie approximation, analyse harmonique et structure hilbertienne de (L^2).

Ainsi, cette leçon illustre trois méthodes majeures d'approximation — polynomiale, par régularisation et par séries de Fourier — qui constituent aujourd'hui des outils fondamentaux de l'analyse moderne.

Leçon n° 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit H un $\mathbb{K}$-ev.

I Espaces de Hilbert et structure

I.A) Espaces préhilbertiens [Hirsch-Lacombe]

Définition 1

On appelle produit scalaire sur H toute application $(.|.)$ de H^2 dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :
- $\forall y \in H$ l'application $(.|y)$ est linéaire.
- 1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\forall x, y \in H, (y|x) = (x|y)$ (symétrie)
  2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\forall x, y \in H, (y|x) = \overline{(x|y)}$ (antisymétrie)
- $\forall x \in H, (x|x) \in \mathbb{R}^+$
- Pour tout $x \in H$, on a $(x|x) = 0 \iff x = 0$

Le couple $(H, (.|.))$ est appelé espace préhilbertien réel (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exemple 2

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ peuvent être doté d'une structure d'espace préhilbertien. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A, B\rangle = Tr(A^T\ B)$ On peut munir $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ d'un produit scalaire $(f|g) = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \overline{g} d\lambda$

Proposition 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$. Pour tous $x, y \in H$, on a

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$$

avec égalité ssi la famille (x, y) est liée.

Corollaire 4

Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé ayant comme norme $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

Corollaire 5

Soit H un espace préhilbertien, pour chaque $y \in H$, la forme linéaire $\varphi_y = (.|y)$ est continue et sa norme dans le dual topologique H' de E est $\|y\|$.

Proposition 6

Soient $x, y \in H$ espace préhilbertien, on a

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Théorème 7 – Fréchet Von-neumann

Une norme dérive du produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité de parallélogramme.

Définition 8

1. On dit que $x, y \in H$ sont orthogonaux si $(x|y) = 0$
2. Soit $A \subset H$ une partie de H on définit l'orthogonal de A noté $A^\perp$ comme l'ensemble des points orthogonaux à tous les points de A ie $A^\perp = \{x \in H, \forall y \in A, (x|y) = 0\}$

Proposition 9

Soient A, B des parties de H alors :

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H
2. $A^\perp = \overline{A}^\perp = (Vect(A))^\perp$
3. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$

Théorème 10 – Théorème de Pythagore

Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien H alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ Ce résultat s'étend facilement par récurrence à une famille finie de vecteurs orthogonaux deux à deux.

I.B. Espace de Hilbert : définitions et exemples [Hirsch-Lacombe]

Définition 11

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 12

Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert, $L^2(\lambda)$ est un espace de Hilbert.

I.C. Théorème de projection sur un convexe fermé [Hirsch-Lacombe]

Théorème 13 – Théorème de projection sur un convexe fermé

Soit C un convexe fermé d'un espace de **Hilbert** H. Alors :

$$\forall x \in H,\ \exists!\, p \in C \mid \|x - p\| = d(x, C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant

$$\forall c \in C,\ \langle x - p \mid c - p\rangle \leq 0.$$

Corollaire 14

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors p_F est linéaire continue de plus $p_F(x)$ est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

Corollaire 15

Pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H, on a $H = F \bigoplus F^\perp$.

De plus on a la caractérisation suivante : F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$

Théorème 16 – Théorème de représentation de Riesz

Soit H un espace de Hilbert et u forme linéaire continue définie sur H . Alors il existe un vecteur $a \in H$ tel que $\forall x \in H, u(x) = (x|a)$ avec $\|u\| = \|a\|$

Corollaire 17

Existence du gradient + existence de l'adjoint.

I.D. Bases hilbertiennes [Hirsch-Lacombe / El Amrani]

Définition 18

Soit H un espace de Hilbert, on dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale si $\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies (e_i|e_j) = 0$ et $\mathcal{B}$ es dite orthonormale si $\forall i, j \in I, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Proposition 19 – Processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 20

Une famille orthogonale formée de vecteurs tous non-nuls est libre.

Définition 21

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si elle est orthonormale et $Vect(e_i, i \in I)$ est dense dans H

Exemple 22

$C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un Hilbert de base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{in.})_{n\in\mathbb{Z}}$

Remarque 23

Via le corollaire 15, on peut montrer facilement qu'une famille orthonormale est totale.

Proposition 24

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Inégalité de Bessel)}$$

Théorème 25 – Bessel-Parseval

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H
- $\forall x \in H, \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2$ (égalité de Bessel)
- $\forall x, y \in H, (x|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)(y|e_i)$

Ainsi si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H, l'application de H dans $l^2(I)$ définie par $x \mapsto ((x|e_i))_{i\in I}$ est une isométrie linéaire. Elle est surjective si et seulement si H est un espace de Hilbert.

Théorème 26

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors pour tout $x \in H,\ x = \sum_{i\in I} (x|e_i)e_i$ (convergence au sens de la norme hilbertienne)

II. Applications aux séries de Fourier [El Amrani/ Objectif Agreg / Francinou Analyse 2]

Définition 27

On définit $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions L^2 2π périodiques presque partout, on peut le munir d'un produit scalaire normalisé :$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ et muni de ce produit scalaire c'est un espace de Hilbert.

Proposition 28

La famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$. On définit alors le n-ième coefficients de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$. Ainsi si $f \in L^2_{2\pi}, c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Proposition 29 – Egalité de Parseval

Si $f \in L^2_{2\pi}$ alors :

1. $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique
2. $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (Formule de Parseval)

Application 30

Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$

Application 31

En utilisant les séries de Fourier dans un cadre plus large on peut calculer les $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$.

Théorème 32 – Théorème d'échantillonage de Shannon

On définit $BL^2 = \{f \in L^2([-A, A]), \hat{f} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-A, A]\}$. Alors :

- BL^2 est un espace de Hilbert
- L'application $BL^2 \to l^2(\mathbb{Z}), f \mapsto (f(\frac{n\pi}{A}))$ est une isométrie.
- De plus, on a $f(x) = \frac{A}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{A})\frac{\sin(Ax-n\pi)}{Ax-n\pi}$ où la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Références :

— Gourdon Analyse,

— El Amrani Fourier,

— Hirsch-Lacombe éléments d'analyse fonctionnelle,

— Objectif agreg

Table des matières

I Espaces de Hilbert et structure **1**
I.A Espaces préhilbertiens [Hirsch-Lacombe] 1
I.B. Espace de Hilbert : définitions et exemples 1
I.C. Théorème de projection sur un convexe fermé 1
I.D. Bases hilbertiennes 2

II. Applications aux séries de Fourier **2**

Intro : Cette leçon est consacrée aux espaces de Hilbert, qui occupent une place centrale en analyse fonctionnelle. Ils constituent une généralisation des espaces euclidiens à la dimension infinie : on y dispose d'un produit scalaire, de notions d'orthogonalité, de projection et d'angles, tout en conservant de bonnes propriétés topologiques grâce à la complétude.

L'intérêt fondamental des espaces de Hilbert est qu'ils permettent de faire de la géométrie dans des espaces de fonctions. Alors que de nombreux espaces fonctionnels sont seulement normés ou complets, les espaces de Hilbert possèdent une structure supplémentaire qui rend possible l'utilisation d'arguments géométriques puissants.

Dans une première partie, j'introduis les espaces préhilbertiens puis les espaces de Hilbert. J'établis les propriétés fondamentales du produit scalaire, de l'orthogonalité et de la projection orthogonale. Le théorème de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation de Riesz montrent alors que la géométrie et la topologie sont intimement liées dans ce cadre.

J'étudie ensuite les bases hilbertiennes. Elles généralisent les bases orthonormées des espaces euclidiens et permettent de représenter tout vecteur comme une série convergente de composantes orthogonales. Les théorèmes de Bessel et de Parseval fournissent alors des outils essentiels de décomposition.

Enfin, j'illustre cette théorie sur l'exemple fondamental des séries de Fourier. L'espace $(L^2_{2\pi})$ est un espace de Hilbert dont la base hilbertienne naturelle est constituée des fonctions exponentielles complexes $((e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}})$. Les coefficients de Fourier apparaissent alors comme les coordonnées d'une fonction sur cette base, ce qui conduit aux théorèmes de Parseval, à des calculs de séries classiques comme $(\zeta(2))$, ainsi qu'à des applications modernes telles que le théorème d'échantillonnage de Shannon.

Leçon n° 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Théorèmes d'inversion [Gourdon, PGCD, Objectif Agreg]

But : On veut généraliser le fait que si f est C^1 et strictement monotone alors f^{-1} est C^1.

Définition 1 – C^k difféomorphisme (local)

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$. On dit que f est un :

1. **difféomorphisme** si f est bijective si$f$ et f^{-1} sont différentiables,
2. **C^k-difféomorphisme** ($k \geq 1$), si f est bijective, de classe C^k et si f^{-1} de classe C^k.
3. **C^∞-difféomorphisme** si f est un C^k-difféomorphisme pour tout $k \geq 1$.

Remarque 2

Un difféomorphisme est un homéomorphisme

Théorème 3 – Théorème d'inversion local

Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinue de E sur F. Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :

1. la restriction $f_{|V}$ de f à V est une bijection de V sur W ;
2. l'application inverse $g : W \to V$ est continue ;
3. g est de classe C^1 et pour tout $x \in V$, $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$

(faire dessin)

Remarque 4

Contre-exemple : $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ est dérivable de dérivée non nulle mais f n'est pas localement injective en 0 car elle n'est pas C^1. En effet considérer les suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, alors on a de part et d'autre une dérivée positive et négative donc par le théorème de Darboux, il y a point tel que la dérivée soit nul, >0 et <0 donc c'est un max local, ainsi la fonction va prendre deux fois la même valeur. Et c'est une base voisinage.

Application 5

L'application $M \mapsto M^p$ est un C^1-difféomorphisme local en I_n ainsi il existe localement une racine p-ième matricielle, exp est un C^1-difféormorphisme local en I_n.

Théorème 6 – Théorème d'inversion globale

Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction injective et de classe C^1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in U, df_x$ est inversible et bi-continue
2. $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \to U$ est de classe C^1.

Remarque 7

Contre-exemple sans f injective :

Application 8 – Racine $k$ième d'une matrice

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est suffisamment proche de l'identité, alors A est une racine k-ième i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$. On considère $f : B \mapsto B^k$.

Application 9 – Régularité d'une racine simple d'un polynôme.

Théorème 10 – Hadamard-Levy

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2. La fonction f est un C^1-difféomorphisme si, et seulement si, f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $df(x)$ est inversible.

II. Théorèmes des fonctions implicites

Théorème 11 – Théorème des fonctions implicites

Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert E et V un ouvert de F. Soit $f : U \times V \to G, (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application de classe C^1. Supposons que pour $(a, b) \in U \times V, \partial_2 f_{(a,b)}$ est un isomorphisme bicontinu de F sur G. Alors il existe :

1. un voisinage ouvert U' de a (avec $U' \subset U$),
2. un voisinage ouvert W de $f(a, b)$,
3. un voisinage ouvert Ω de (a, b) (avec $\Omega \subset U \times V$),
4. une fonction $\varphi : U' \times W \to V$ de classe C^1

vérifiant :
Pour tout $x \in U'$, pour tout $z \in W$, il existe une unique solution y de $f(x, y) = z$ avec $(x, y) \in \Omega$, et on a $y = \varphi(x, z)$ En particulier,
$f(x, \varphi(x, z)) = z$ pour tout $(x, z) \in U' \times W$.

Application 12

On s'intéresse à l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\epsilon, x) \mapsto (x - a_1)(x - a_2) + \epsilon x^3$. Alors pour ϵ assez petit le polynôme $x \mapsto f(\epsilon, x)$ admet 3 racines distinctes $x_1(\epsilon) < x_2(\epsilon) < x_3(\epsilon)$ On peut même calculer le développement limité des racines.

Théorème 13 – Théorèmes des extrama liés

Soient $f, g_1, \ldots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 définies sur U ouvert. Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \ldots, dg_r(a))$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dg_i(a).$$

Application 14 – PGCD p°380

Inégalité d'Hadamard

III. Changement de coordonnées

[Roubière PGCD, Gourdon]

Théorème 15 – théorème du changement de variable

Application 16

Calcul de l'intégrale de Gauss via changement polaire.

Lemme 17 – Lemme de Morse

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^3 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$ au voisinage de 0

IV. Variétés différentielles [Paul Donato Calcul différentiel]

IV.A. Sous-Variétés

Définition 18 – Carte locale

Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe C^p si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que :

Il existe $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un C^p difféormorphisme local tel que :

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$$

Exemple 19

Le cercle unité S^1 est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ en considérant : $\Phi(x, y) = (\arctan(\frac{y}{x}), \sqrt{x^2+y^2}-1)$

Définition 20 – Graphe

Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe C^p si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que :

Il existe $u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p et un changement de coordonnées $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $W \cap N = \{A(z, u(z)), z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$

Application 21

La parabole $\mathcal{P} := \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de classe C^∞ de dimension 1. Pour la parabole en fait il n'y a pas de local tout est global.

Définition 22 – Equation

Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe C^p si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que :

Il existe $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$

Application 23

La sphère S^1 de $\mathbb{R}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 et de classe C^∞

Définition 24 – Nappe paramétrée

Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe C^p si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que :

il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et une application $j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p telle que $j(0) = x_0$; $dj(0)$ est injective et $j : \mathcal{U} \to N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Exemple 25

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

Théorème 26

Toutes les définitions sont équivalentes

IV.B. Espace tangent

Définition 27 – Espace tangent

Lorsque N est une variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$ alors l'espace tangent à N en x_0, noté $T_{x_0}N$, est l'ensemble des vecteurs vitesse à $t = 0$, des chemins C^1 tracés sur N passant par x_0 en $t = 0$ ie :

$$T_{x_0}N := \{\gamma'(0); \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n), I\text{intervalle contenant } 0, \gamma(I) \subset N, \gamma(0) = x_0\}$$

Proposition 28

- Carte locale : $T_{x_0}N = d\varphi^{-1}[\varphi(x_0)](\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$
- Graphe : $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0).h), h \in \mathbb{R}^k\}$ avec z_0 tel que $x_0 = A(z_0, u(z_0))$
- Equation : $T_{x_0}N = \ker[dF(x_0)]$
- Nappe paramétrée : $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$

Application 29

Pour $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $T_M(O_n(\mathbb{R})) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X^{-1}H = -(X^{-1}H)^T\}$

Annexe

Faire les dessins dans le Donato ils sont super. Faire les dessins des théorèmes TIL et TFI avec les graphes. On illustre en analyse la puissance de la complétude.
Références :

-PGCD

- Analyse Gourdon

- Calcul différentiel pour la license Paul Donato

-Objectif Agreg

Table des matières

I Théorèmes d'inversion [Gourdon, PGCD, Objectif Agreg] **1**

II. Théorèmes des fonctions implicites **1**

III. Changement de coordonnées **2**

IV. Variétés différentielles [Paul Donato Calcul différentiel] **2**

IV.A. Sous-Variétés 2

IV.B. Espace tangent 2

Intro : Ici, on cherche à généraliser le fait que si f est C^1 et monotone alors f^{-1} est C^1 (TIL). On cherche donc à généraliser les résultats sur $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ ou à des espaces plus abstraits. Intérêt du TIL résoudre $f(x,y)=0$ au voisinage d'un point annulateur. Faire des dessins pendant le speech !

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

On notera $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

I Applications différentiables

I.A) Notion de différentielle [Paul Donato, PGCD]

Définition 1
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{h\to 0}(\|h\|)$. On dit que f est différentible sur $\mathcal{U}$ si f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$.

Remarque 2
Une application différentiable se comporte alors localement comme une application linéaire.

Proposition 3
Il y a unicité de l'application L on la note alors $df(a)$.

Exemple 4
Les applications affines et linéaires sont différentiables.

Exemple 5
Si $n = p = 1$ alors f différentible en $a \iff f$ est dérivable en a.

Exemple 6
L'inverse matricielle/ multiplication matricielle est différentible + calcul de la différentibale

Proposition 7
Différentiable $\implies$ continue, différentielle d'un produit, somme et composition

Proposition 8
Règle de la chaîne

Proposition 9
Formule de Leibniz

Corollaire 10
Différentielle d'une forme bilinéaire

Définition 11
Introduction du gradient (existe toujours par le théorème de Riesz).

I.B. Différentielles partielles [Donato]

Définition 12
Définition de différentielle selon un vecteur

Proposition 13
Différentiable $\implies$ différentiable selon tout vecteur (Contre-exemple $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$

Définition 14
Dérivées partielles, Matrice Jacobienne

Proposition 15
Expression de la règle de la chaîne avec les dérivées partielles

I.C. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ [Donato, PGCD]

Définition 16
Définition d'être de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Exemple 17
Changement de coordonnées polaires + calcul de l'intégral de Gauss

Proposition 18
Le déterminant est une application de classe C^1 + calcul de sa différentielle.

Théorème 19
$C^1 \iff$ admet des dérivées partielles continues.

II. Différentielles d'ordres supérieurs [Donato, PGCD]

II.A. Différentielles secondes [Gourdon, Donato]

Définition 20
Différentielles de tout ordre $\mathcal{C}^k$,$\mathcal{C}^\infty$

Définition 21
Hessienne, forme bilinéaire associée

Théorème 22
Théorème de Schwarz

Application 23
La hessienne est donc symétrique.

II.B. Etude locale, globale [Gourdon, PGCD, Donato]

Proposition 24
Equivalence être de classe $\mathcal{C}^p \iff$ admettre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p et sont toutes continues.

"Propriétés locales pour propriétés globales"

Théorème 25
TIL,TFI

Théorème 26
inégalité des accroissements finis, applications sur un ouvert convexe

Définition 27
Être une fonction propre

Théorème 28
Théorème de Hadamard-Levy

Théorème 29
Formule de Taylor

Lemme 30 – Lemme de Morse

Application 31
Calcul de la différentielle de l'exponentielle + classe $\mathcal{C}^1$.

II.C. Recherche d'extrama [PGCD, Donato, Gourdon]

Dans cette partie on suppose que $p = 1$.

Définition 32
extrama locaux/globaux

Définition 33
Définitions de points critiques et caractérisations

Théorème 34
CN et CS pour avoir un extremum avec des conditions sur la hessienne.

Théorème 35
Théorème des extramas-liés

Application 36
Exemple d'application

III. Cas des fonctions harmoniques

III.A. Différentiabilité complexe [Tauvel, Rudin, Objectif Agreg]

Dans cette section, on va établier un lien entre holomorphie et différentiabilité :

Proposition 37
Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable en z_0
2. f est différentiable en (x_0, y_0), et on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$
3. f est différentiable en (x_0, y_0) et $df(x_0, y_0) \in \mathbb{C}dz$. Si ces conditions sont vérifiéés on a :
$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$
4. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$
5. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

Proposition 38 – Conditions de Riemann
Notons P et Q les partie réelle et imaginaire de f. Alors f est holomorphe ssi
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Définition 39
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction sur U, on dit que f est anti-holomorphe sur U si $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$.

Proposition 40
f est anti-holomorphe signifie que :
$$\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

III.B. Fonctions harmoniques [Rudin, Tauvel, Objectif Agreg]

Définition 41 – Fonctions harmoniques
On note $C^2(U)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $f \in C^2(U)$, si $z_0 \in U$, on définit le *laplacien* de f au point z_0 défini par :
$$\triangle f(z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0)$$
On dit que f est harmonique sur U si f est de classe C^2 sur U et vérifie $\triangle f = 0$.
On note $Har(U)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur U.

Proposition 42
Avec les notations : $\triangle f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}(z_0) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$

Proposition 43

On a :

— $Har(U)$ est $\mathbb{C}$ sous-espace vectoriel de $C^2(U)$ mais n'est pas une sous-algèbre de $C^2(U)$. ($z = x+iy \mapsto x^2$

— Si f est holomorphe ou anti-holomorphe alors $f \in Har(U)$.

— On a $\overline{\triangle f} = \triangle \overline{f}$ donc $f \in Har(U) \iff \overline{f} \in Har(U) \iff Re(f), Im(f) \in Har(U)$

Proposition 44

Soient U ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in Har(U)$. Alors :

i) f est la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe dans U.

ii) Si f est à valeurs réelles, c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans U déterminée à une constante additive imaginaire pure près.

Corollaire 45

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in Har(U)$.

i) Si f est à valeurs réelles, c'est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

ii) f est de classe C^∞ dans U et toutes les dérivées de f sont harmoniques dans U.

iii) Soient V un ouvert de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{H}(V)$ vérifiant $g(V) \subset U$. Alors $f \circ g \in Har(V)$.

Proposition 46

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in Har(U)$. Alors f possède la propriété de la moyenne dans U et vérifie le principe du maximum dans U.

Remarque 47

Si f est continue et vérifie la propriété de la moyenne alor elle est aussi harmonique donc est C^∞ au lieu de juste continue.

Corollaire 48

Soient U un ouvert connexe et $f \in Har(U)$ à valeurs réelles.

i) Si $a \in U$ et si $f(z) \leq f(a)$ dans un voisinage de a, alors f est constante.

ii) Supposons U borné, f continue sur $\overline{U}$, et non-constante dans U. Alors pour tout $z \in U$, on a $f(z) < \sup\{f(\xi), \xi \in \overline{U} \setminus U\}$

Références :

PGCD Rouvière

Analyse Gourdo

Analyse complexe pour la licence 3 Tauvel

Analyse réelle et complexe Rudin

Calcul différentiel pour la licence Paul Donato

Table des matières

I Applications différentiables **1**

I.A Notion de différentielle [Paul Donato, PGCD] . . . 1

I.B. Différentielles partielles . . . 1

I.C. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 1

II. Différentielles d'ordres supérieurs **1**

II.A. Différentielles secondes . . . 1

II.B. Etude locale, globale . . . 1

II.C. Recherche d'extrama . . . 2

III. Cas des fonctions harmoniques **2**

III.A. Différentiabilité complexe . . . 2

III.B. Fonctions harmoniques . . . 2

Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

I Approximation locale : Formule de Taylor-Young [Rombaldi,PGCD]

Théorème 1 – Taylor-Young

Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$, elle admet alors, au voisinage de a, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^n)$$

Théorème 2 – Taylor-Young en dimension supérieure

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe C^k sur U et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors lorsque $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tend vers 0 :

$$f(x+h) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right] + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[2]} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]} + o(\|h\|^k)$$

Définition 3 – Développements limités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non-réduit à un point, a un point de I ou un point du bord et f une fonction définie sur I à valeurs réelles ou complexes.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a, s'il existe une fonction polynomiale P dans $\mathbb{K}_n[x]$ et une fonction ε définie sur I à valeurs réelles ou complexes telles que :

i) $\forall x \in I, f(x+a) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$

ii) $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 4

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, ce-dernier est unique.

Application 5

$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \iff [A,B] = 0$. Faire le développement à l'ordre 2 de chaque terme. C'est dans le Rombaldi.

Proposition 6

Si f est $n-$fois dérivable alors f admet un développement limité à l'ordre n.

Proposition 7

Si $n = 1$, la réciproque est vraie.

Remarque 8

La réciproque est fausse pour n>1, il suffit de considérer $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$

Exemple 9

DL usuels + $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$

Application 10

Les DL permettent de lever des formes indéterminées pour calculer des limites ou prouver la convergence de certaines séries.

II. Approximation globale

II.A. Formule de Taylor-Lagrange [Rombaldi]

Théorème 11 – Taylor-Lagrange

Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle compact $[a,b]$ non-réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Remarque 12

C'est une généralisation du théorème des accroisements finis.

Corollaire 13 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé E) définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non-réduit à un point, de classe C^n sut cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée sur $]a,b[$ par une constante M, alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Remarque 14

Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

II.B. Formule de Taylor avec reste intégral [Rombaldi, Objectif Agreg]

Théorème 15 – Taylor reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles (ou dans un espace de Banach) définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$$

Remarque 16

Avec plus de régularité on a donc plus d'informations sur le reste de la formule de Taylor-Young.

Théorème 17

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application de classe C^{k+1} sur $\mathcal{U}$. Si le segment $[a, a+h]$ est inclus dans $\mathcal{U}$. Alors,

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(a).(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Application 18 – Lemme d'Hadamard

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Si $f(0) = 0$ alors f appartient à l'idéal de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions coordonnées.

Lemme 19 – Lemme de Morse

Lemme de Morse

II.C. Application : Développement en série entière [El Amrani, Rombaldi]

Définition 20

DSE au voisinage de x_0

Proposition 21

Si f est DSE en $x_0 \implies f$ C^∞ au voisinage de x_0 + le DSE est donné par la formule de Taylor.

Application 22

Application de la formule de Taylor-Lagrange : Critère pour être DSE en majorant la dernière dérivée

Application 23

Application de la formule de Taylor avec reste intégral : DSE de $e^x, \cos(x), \sin(x)$ et $(1+x)^\alpha$.

Théorème 24 – Bernstein

Théorème de Bernstein

Théorème 25 – Inégalité de Kolmogorov

III. Applications des formules de Taylor

III.A. Recherche d'extrema [PGCD]

Définition 26

Maximum et minimum local

Définition 27

Point critique

Proposition 28

Condition nécessaire et condition suffisante pour avoir un extremum local.

Exemple 29

$f(x, y) = x^2 + y^4$ a un minimum global en 0 strict.

III.B. Etude asymptotique d'intégrale [PGCD, Zuily, Quéffelec]

Lemme 30 – Phase non stationnaire

Soient $a < b, \varphi \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi' \neq 0$ sur $[a, b]$ et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)dx = O_{t\to+\infty}(\frac{1}{t})$$

Théorème 31 – Méthode la phase stationnaire

Soient $a < b$ et $f, \varphi \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que φ' s'annule en un unique $x_0 \in]a, b[$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$, alors :

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)dx = f(x_0)e^{it\varphi(x_0)}e^{i\times sign(\varphi''(x_0))\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} + O_{t\to+\infty}(\frac{1}{t})$$

Application 32

Fonction d'Airy (introduite pour étudier les arcs-en-ciel)

III.C. En probabilités [Zuiley-Quéffelec]

Définition 33

Fonction caractéristique

Théorème 34 – Paul-Lévy

Théorème 35

Théorème central-limite

Application 36

Intervalles de confiance asymptotique.

rajoute un truc pour la position relative et le DSE pour calculer des équivalents de suites

Références :

Rombaldi Eléments d'analyse réelle

PGCD Rouvière

Objectif Agreg Beck Malick Peyré

El Amrani Suites et séries de fonctions

Gourdon Analyse

Analyse pour l'agrégation Queffélec et Zuily

Table des matières

I Approximation locale : Formule de Taylor-Young [Rombaldi,PGCD] **1**

II. Approximation globale **1**
II.A. Formule de Taylor-Lagrange . . . 1
II.B. Formule de Taylor avec reste intégral . . . 1
II.C.Développement en série entière . . . 2

III. Applications des formules de Taylor **2**
III.A. Recherche d'extrema . . . 2
III.B. Etude asymptotique d'intégrale . . . 2
III.C. En probabilités . . . 2

Intro : L'intérêt des formules de Taylor est d'approximer des fonctions par des fonctions plus simple à savoir polynomiales, on aimerait donc savoir à quelles conditions une fonction peut elle être approximer.

Leçon 219 : Extrema : Existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Soit X un $\mathbb{R}$-evn et $f : X \to \mathbb{R}$.

I Existence et unicité d'extrema

I.A) Premières définitions [PGCD]

Définition 1

Maximum/minimul local/global

Remarque 2

Un extremum global est local et l'inverse est faux avec $x \mapsto (x-2) \times x \times (x+2)$ (la fonction possède deux extrema locaux qui ne sont pas globaux.

I.B) Compacité [Gourdon]

Théorème 3 – Théorème des bornes atteintes

Application 4 – Théorème du point fixe dans un compact

Si K est un compact et $f : K \to K$ continue telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Application 5

Si K_1 et K_2 sont des compacts alors $\exists x_1, x_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Proposition 6

Si f est continue coercive sur X evn fermé non borné en dimension finie dans $\mathbb{R}$ admet un minimum.

Application 7

Si F fermé et K compact, $d(F, K)$ est atteinte.

I.C. Convexité [Objectif Agreg]

Définition 8

Ensembles, fonctions convexes et fonctions strictement convexes.

Exemple 9

La norme est strictement convexe.

Théorème 10 – Caractérisation de la convexité

Application 11

$A \in S_n(\mathbb{R}), x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est convexe si et seulement si A est positive.

Proposition 12

L'ensemble des extrema d'une fonction convexe est un convexe, si f strictement convexe et admet un minimum alors f a un unique extremum.

Remarque 13

L'existence d'un point minimum pour une fonction strictement convexe n'est pas vrai en général (considérer exp).

I.D. Espaces de Hilbert [Hirsch]

Théorème 14 – Théorème de projection sur un convexe fermé

Corollaire 15

p_F est continue, linéaire, 1-lipschitzienne pour F sev.

Corollaire 16

Si $C = F$ est un sev fermé alors $H = F \bigoplus F^{\perp}$.

Application 17

Existence de l'espérance conditionnelle en probabilité.

Théorème 18 – Théorème de représentation de Riesz

Application 19

EXistence de l'adjoint dans un espace de Hilbert.

I.E. Cas des fonctions holomorphes [Tauvel, Objectif agreg]

Théorème 20

Formule de Cauchy

Corollaire 21

Propriété de la moyenne

Proposition 22

Inégalité de Cauchy

Corollaire 23

Théorème de Liouville

Application 24

Théorème de d'Alembert-Gauss

Proposition 25

Principe du maximum local.

Proposition 26

Principe du minimul local.

Remarque 27
La disymétrie vient du module

Proposition 28
Principe du maximum global.

II. Extrema et calcul différentiel

II.A. Propriétés du 1er ordre [Rombaldi, PGCD]

Définition 29
Point critique

Théorème 30
Un extremum local est un point critique

Remarque 31
La réciproque est fausse ($x \mapsto x^3$)

Théorème 32 – Théorème de Rolle

Corollaire 33
Inégalité des accroissements finis.

II.B. Conditions du second ordre [PGCD]

Théorème 34
CN et CS d'existence d'extrema avec des conditions sur la hessienne.

Exemple 35
Le cas de la dimension 2.

Exemple 36
Pour le dernier cas considérer les trois fonctions $f(x,y) = x^4, f(x,y) = -x^4$ et $f(x,y) = x^4 - y^4$
.

II.C. Optimisation sous-contrainte [PGCD, Objectif Agreg]

Théorème 37 – Théorème des extremas liés

Application 38
Inégalité d'Hadamard

III. Recherche d'extrema [Francinou, Bernis, PGCD]

Théorème 39 – Algorithme du gradient à pas optimal

Théorème 40
Méthode de Newton

Références :

— Rombaldi Elements d'analyse réelle

— PGCD

— Objectif Agreg Beck Malick Peyré

— Gourdon Analyse,

— Hirsch Lacombe Elements d'analyse fonctionnelle

— Paul Donato Calcul différentiel pour la licence 3

— Tauvel Analyse complexe pour la licence 3

— Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza

— Oraux X-ENS 3 Francinou

Table des matières

I Existence et unicité d'extrema **1**
- I.A Premières définitions [PGCD] . . . 1
- I.B Compacité [Gourdon] . . . 1
- I.C. Convexité . . . 1
- I.D. Espaces de Hilbert . . . 1
- I.E. Cas des fonctions holomorphes . . . 1

II. Extrema et calcul différentiel **2**
- II.A. Propriétés du 1er ordre . . . 2
- II.B. Conditions du second ordre . . . 2
- II.C. Optimisation sous-contrainte . . . 2

III. Recherche d'extrema **2**

Intro : La recherche d'extremums a de nombreuses applications dans divers domaines (informatique, économie, ...). Dans cette leçon on s'intéresse d'abord aux conditions d'existence et d'unicité, selon que l'on soit sur un compact, dans un espace de HILBERT, ... puis on fait ensuite le lien avec le calcul différentiel, notamment si f est définie sur $X \subset F$ espace vectoriel normé de dimension finie, les extrema sont à chercher parmi les points critiques, les points intérieurs à X où f n'est pas différentiable et les points non intérieurs à X (faire un schéma)

Leçon 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

I Théorèmes fondamentaux de la théorie des EDOs

I.A) Théorème de Cauchy-Lipschitz [BERT]

Définition 1
Solutions globales et maximales

Théorème 2 – Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarque 3
On peut passer d'une équation différentielle d'ordre n à une équation différentielle d'ordre 1

Proposition 4
$C^1 \implies$ localement lipschitzien

Application 5
$y' = t^2 e^y$ et $y(0) = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6
$y'' + (y')^2 \sin(ty) = 0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

I.B) Prolongement des solutions [BERT]

Théorème 7 – Théorème de sortie de tout compact

Corollaire 8
Théorème des bouts.

Exemple 9
$y' = y^2$ et $x' = -x$ avec $y' = -y$

Lemme 10
Lemme de Grönwall intégral.

Application 11
Si f continue, localement lipschitzienne et bornée alors la solution est globale

II. Méthodes de résolutions explicites, étude quantitative

II.A. Résolution des EDOs linéaires [Gourdon]

Théorème 12
Théorème de Cauchy-linéaire

Proposition 13
Méthode de la constante.

Application 14
Formule de Duhamel si A est constante.

Théorème 15
Solutions explicites d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n.

II.B. Résolution en se ramenant à une EDL [Gourdon]

Exemple 16
Equation différentielle de Bernouilli

Application 17
Résoudre $y' - ty^3 + ty = 0$

II.C. Utilisation des séries entières [BERT+EL Amrani]

Application 18
Détail de la méthode + application à la résolution de $(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$

III. Etude qualitative des solutions

III.A. Champs de vecteurs, isoclines et points stationnaires [BERT]

Définition 19
Equation autonome et trajectoires

Définition 20
Isoclines

Définition 21
Courbe intégrale et portrait de phase.

Exemple 22
Système de Lotka-Voltera

Exemple 23
Equation du pendule

Application 24
Présentation du cas des équations autonomes d'ordre 2 : portraits de phase de $Y' = AY$ selon les propriétés de diagonalisation de la matrice A.

III.B. Nombre de zéros d'une équation différentielle [Zuily-Quéffelec]

Proposition 25
Nombre de zéro d'une équa diff

IV. Applications [JB Bernis]

Théorème 26
Théorème D'Hadamard-Levy

Références :

— Berthelin Equations différentielles

— Gourdon Analyse

— PGCD Rouvière

— Analyse pour l'agrégation Zuily-Quéffelec

— JB Bernis 40 développements pour l'agrégation

Table des matières

I Théorèmes fondamentaux de la théorie des EDOs **1**
I.A Théorème de Cauchy-Lipschitz [BERT] . . . 1
I.B Prolongement des solutions [BERT] . . . 1

II. Méthodes de résolutions explicites, étude quantitative **1**
II.A. Résolution des EDOs linéaires . . . 1
II.C. Utilisation des séries entières . . . 1

III. Etude qualitative des solutions **1**
III.A. Champs de vecteurs, isoclines et points stationnaires . . . 1
III.B. Autres . . . 2

IV. Applications **2**

Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Théorie des équations différentielles linéaires

I.A) Premières définitions[Gourdon]

Définition 1
Equations différentielles d'ordre p et équations différentielles homogènes.

Remarque 2
On peut toujours se ramener au cas $p = 1$ avec une matrice compagnon.

Remarque 3
Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ on parle de système d'équations différentielles linéaires et on se ramène au cas $p = 1$ comme avant.

Définition 4
On note S_H l'ensemble des solutions homogènes et S l'ensemble des solutions.

I.B) Théorème de Cauchy-linéaire : structure des solutions [Gourdon]

Théorème 5 – Théorème de Cauchy linéaire

Remarque 6
Réécriture pour les équation différentielles d'ordre n.

Exemple 7
Il existe une unique solution à $y' + y = \sin(t), y(0) = 0$.

Application 8
Si on trace les différentes solutions avec conditions initiales différentes, elles ne se croisent pas par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschtiz.

Remarque 9
L'hypothèse de linéarité est nécessaire pour l'unicité par exemple $y' = \sqrt{y}$ et $y(0) = 0$, on a deux solutions : $y = 0$ et $y(t) = \frac{t^4}{4}$.

Proposition 10
S_H est un sev de dimension n. S es un espace affine de dimension n et de direction S_H.

Remarque 11
On a donc $S = \{Y + Y_0, Y \in S_H\}$ où Y_0 est une solution particulière.

I.C. Notion de wronskien [Gourdon, Berthelin]

Définition 12
Wronskien

Remarque 13
Expression du Wronskien lorsque l'on a p solutions.

Proposition 14
Le rang des solutions à t fixé est indépendant de t.

Proposition 15
$Y_1, \dots, Y_p$ solutions indépendantes $\iff \exists t_0$ tel que $w(t_0) \neq 0 \iff \forall t, w(t) \neq 0$.

Proposition 16 – Identité d'Abel
$w'(t) = Tr(A(t))W(t)$

Application 17
$\forall t \in \mathbb{R}, \det(e^{tA}) = e^{tTr(A)}$

II. Résolutions explicites

II.A. Résolution d'équation homogène [Berthelin]

Définition 18
Polynôme caractéristique associé à une EDL à coefficients constants.

Proposition 19
Résolution de $Y' = AY$: la solution est de la forme $Y(t) = e^{tA}Y_0$.

Remarque 20
Cela demande de calculer e^A qui n'est pas toujours facile, la réduction peut aider.

Lemme 21 – Lemme des noyaux

Théorème 22
Expression explicite dans le cas constant des équations différentielles autonomes.

Exemple 23
Cas de l'ordre 2 à coefficients constants.

Application 24
Résolution de l'équation différentielle associée à l'oscillateur harmonique sans frottements.

Théorème 25 – Equation de Sylvester

II.B. Recherche de solutions particulières [Gourdon, Berthelin]

Proposition 26 – Méthode de variation des constantes

Corollaire 27
Formule de Duhamel en dimension 1.

Application 28
Transformée de Fourier d'une gaussienne.

Exemple 29
Solutions du premier exemple donné.

II.C. Solutions développables en série entière [Berthelin, El Amrani]

Proposition 30
Détail de la méthode + application à un cas simple.

III. Etude qualitative en dimension 2

III.A. Localisation des zéros [Berthelin, Analyse pour l'agrégation Quéffelec]

Théorème 31 – Théorème de localisation de Sturm

Exemple 32
$y'' + y = 0$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$. (en effet la résolution explicite donne cos).

Exemple 33
$y'' + ty$ s'annule une fois sur $]-\infty, 0[$ et une infinité de fois sur $]0, +\infty[$.

Théorème 34 – Nombre de zéros d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(E) \qquad y'' + q\,y = 0.$$

On suppose que

$$q \in C^1([a, +\infty[, \mathbb{R}_+^*), \qquad \int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty, \qquad q'(x) = o_{+\infty}\left(q^{3/2}(x)\right).$$

Alors, pour toute solution non nulle y de (E), la fonction

$$N : x \longmapsto \mathrm{Card}\{u \in [a, x] \mid y(u) = 0\}$$

admet à l'infini l'équivalent

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

I.C) III.B. Portrait de phase d'équations autonomes. [Berthelin]

Définition 35
Portraits de phase à mettre en ANNEXE

Application 36
Tracer les trajectoires dans le cas $Y' = AY$ en dimension 2 avec les portraits de phase en annexe.

Références :

— Gourdon Analyse,

— El Amrani Suites et séries de fonctions,

— Berthelin Equations différentielles,

— Analyse pour l'agrégation Zuily-Quéffelec

Table des matières

I Théorie des équations différentielles linéaires **1**
I.A Premières définitions [Gourdon] . . . 1
I.B Théorème de Cauchy-linéaire : structure des solutions [Gourdon] . . . 1
I.C. Notion de wronskien . . . 1

II. Résolutions explicites **1**
II.A. Résolution d'équation homogène . . . 1
II.B. Recherche de solutions particulières . . . 2
II.C. Solutions développables en série entière . . . 2

III. Etude qualitative en dimension 2 **2**
III.A. Localisation des zéros . . . 2
I.C III.B. Portrait de phase d'équations autonomes. [Berthelin] . . . 2
III.B. Portrait de phase d'équations autonomes . . . 2

Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

I Convergence des suites numériques [Rombaldi, El Amrani]

I.A) Limites

Définition 1
Définition suite convergente et divergente.

Exemple 2
$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1, $u_n = n$ diverge. Cas des suites arithmétriques et géométriques.

Théorème 3
Unicité de la limite.

Proposition 4
Toute suite numérique convergente est bornée.

Proposition 5
Linéarité de la limite.

Proposition 6
Caractérisation séquentielle de la continuité.

Définition 7
Suites de Cauchy

Proposition 8
Toute suite convergente est de Cauchy, et toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 9
Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.B) Valeurs d'adhérences

Définition 10
Sous-suite convergente

Proposition 11
Si $u_n \to l$ alors toute sous-suite converge vers l.

Définition 12
Valeurs d'adhérences

Proposition 13
Si u_n converge elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Exemple 14
$(-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence 1 et -1.

Proposition 15
L'ensemble des valeurs d'adhérences est un fermé qui est : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$

Exemple 16
$(\sin(n))_n$ et $(\cos(n))_n$ ont pour ensemble de valeur d'adhérence [-1,1].

I.C. Cas des suites réelles [Rombaldi, El Amrani]

Lemme 17
Conservation des inégalités larges

Théorème 18
Théorème des gendarmes.

Proposition 19
Limite infinie et inégalité.

Théorème 20 – Théorème de la limite monotone

Exemple 21
Intégrales de Wallis : $(I_n)_n$ converge car croissante majorée.

Définition 22
Suites adjacentes

Proposition 23
Convergence des suites adjacentes

Application 24
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Lemme 25
Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Théorème 26 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

Corollaire 27
Une suite converge si et seulement si elle est bornée et n'admet qu'une unique valeur d'adhérence.

Définition 28
Limite sup et inf.

Remarque 29

C'est utile en pratiqur car ces limites sont toujours définies.

Proposition 30

La limite inf est la plus petite valeur d'adhérence et la limite sup est la plus grande.

Théorème 31

$(u_n)_n$ converge si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$.

II. Suites particulières

II.A. Séries de nombres réels et complexes, comparaison [Gourdon]

Définition 32

Série

Exemple 33

Cas de la série géométrique.

Proposition 34

Si $(u_n)_n$ est positive alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_N)_N$ est majorée.

Exemple 35

Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 36

Sommation des relations d'équivalents / théorèmes de comparaison.

Application 37

Développement asymptotique à l'ordre 2 de la série harmonique.

Théorème 38

comparaison série-intégrale.

II.B. Suites définies par une relation de récurrence [Rombaldi]

Théorème 39

Théorème de Césaro

Exemple 40

Lemme de l'escalier : Soit $(u_n)_n$, une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \to l$.

II.C. Approximation de réels [Rombaldi, PGCD, Zuily-Queffelec, Di Menza]

Proposition 41

Suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{Q}$ tendant vers un réel fixé.

Théorème 42

Méthode de Newton

Application 43

Algorithme du gradient à pas optimal

Théorème 44

Nombre de zéro d'une équa diff.

Références :

— El Amrani Suites et séries de fonctions

— Gourdon, Analyse

— Rombaldi Elements d'analyse réelle

— PGCD

— Analyse pour l'agrégation Zuily-Queffelec

— Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza

Table des matières

I Convergence des suites numériques [Rombaldi, El Amrani] 1

I.A Limites . . . 1

I.B Valeurs d'adhérences . . . 1

I.C. Cas des suites réelles . . . 1

II. Suites particulières 2

II.A. Séries de nombres réels et complexes, comparaison . . . 2

II.B. Suites définies par une relation de récurrence . . . 2

II.C. Approximation de réels . . . 2

Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Soit (X, d) un espace métrique.

I Comparaison de suites et de fonctions

Définition 1
Echelle de comparaison.

Exemple 2
Exemple d'échelles de comparaison.

Définition 3
Définition développement asymptotique et développement limité (lorsque l'échelle choisie est les monômes).

Exemple 4
On considère l'échelle asymptotique

$$(x^\alpha (\ln x)^\beta)_{\alpha\in\mathbb{R},\,\beta\in\mathbb{R}} \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

admet un développement asymptotique réduit à son premier terme sur cette échelle :

$$\frac{1}{x} \sim x^{-1} \quad (x \to +\infty),$$

ce qui correspond au terme de l'échelle pour $\alpha = -1$ et $\beta = 0$.

Proposition 5
Unicité lorsque l'échelle de précision est fixée.

Théorème 6
Formule de Taylor-Young.

Application 7
Théorème central limite.

Remarque 8
Pour avoir un DL en a il suffit d'avoir le DL en 0 de $x \mapsto f(x + a)$.

Proposition 9
DL en 0 de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$

Proposition 10
On peut sommer et multiplier les DL.

Exemple 11
DL en 0 de $\frac{e^x}{1+x}$

Proposition 12
On peut composer des DL

Exemple 13
DL en 0 de $\ln(\cos(x))$.

Proposition 14
Intégration des DL.

Application 15
DL en 0 de arctan.

Exemple 16
DL usuels en 0 en annexe.

Application 17
Les DA permettent d'obtenir des informations sur la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Remarque 18
Les notions de développements limités et asymptotiques s'adaptent aux suites de façon équivalente

II. Exemples de développements asymptotiques de suites

II.A. Suites et séries numériques [Gourdon, Rombaldi, El Amrani]

Théorème 19
Sommation des équivalents.

Proposition 20
Comparaison série-intégrale.

Application 21
La série de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Application 22
Développement asymptotique à deux termes de la série harmonique.

Exemple 23
Formule de Stirling obtenue par les intégrales de Wallis.

II.B. Suites définies impliciement [Francinou Analyse 1, Rombaldi, Zuily-Queffelec]

Remarque 24

Pas de méthode générale mais l'idée de départ est de partir de la relation de définition de la suite.

Exemple 25

Développement asymptotique de an définie comme la plus grande racine de $X^{2n}2nX + 1$.

Exemple 26

Développement asymptotique $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

Théorème 27

Nombre de zéros d'une équa diff

III. Exemples de développements asymptotiques de fonctions.

III.A. Fonctions définies par une intégrale [Gourdon, Zuily, PGCD]

Théorème 28

Intégration des relations de comparaison.

Théorème 29

Méthode de la phase stationnaire.

Application 30

Fonction d'Airy

III.B. Fonctions définies par la somme d'une série[PGCD, Zuily-Queffelec, Gourdon]

Exemple 31

Equivalent de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ en 1^-.

Exemple 32

DL de la fonction ζ de Riemann.

Références :

-Gourdon, Analyse

-PGCD

-El Amrani

- Analyse pour l'agrégation Zuily-Queffelec

- Rombaldi Elements d'analyse réelle.

- Francinou Analyse 1

Table des matières

I Comparaison de suites et de fonctions **1**

II. Exemples de développements asymptotiques de suites **1**

II.A. Suites et séries numériques 1

II.B. Suites définies impliciement 2

III. Exemples de développements asymptotiques de fonctions. **2**

III.A. Fonctions définies par une intégrale 2

III.B. Fonctions définies par la somme d'une série 2

Leçon 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

I Généralités sur les suites récurrentes

I.A) Suites récurrentes d'ordre h et 1.

Définition 1
Suites récurrentes d'ordre h.

Remarque 2
On peut toujours se ramener au cas de l'ordre 1 en prenant $g(x_1, \dots, x_h) = (f(x_1, \dots, x_h), x_1, \dots, x_{h-1})$

I.B) Cas des suites récurrentes réelles d'ordre 1

On se place ici sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $f(I) \subset I, u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème 3
Caractérisation séquentielle de la continuité

Corollaire 4
Si $u_n \to l$ et f continue alors $f(l) = l$.

Exemple 5
La suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ a pour limite potentielle -1 ou 3.

Proposition 6
Lien entre la monotonie de f et monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 7
Cas de la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$

I.C) Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Définition 8
Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

Définition 9
Polynôme caractéristique associé à une suite récurrente.

Proposition 10
Expression explicite

Remarque 11
Expression explicite des suites récurrentes d'ordre 2.

Exemple 12
Suite de Fibonacci

I.D. Quelques familles de suites récurrentes [Gourdon]

Exemple 13
Suite arithmétique

Exemple 14
Suite géométrique

Exemple 15
Suites homographiques

II. Points fixes et suites récurrentes

II.A. Théorème du point fixe [Gourdon, PGCD]

Théorème 16 – Théorème du point fixe de Banach-Picard
(faire apparaitre la suite récurrente)

Remarque 17
L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ n'est pas suffisante pour l'existence : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Corollaire 18
Si f^r est k-contractante avec $0 < k < 1$ alors f admet un unique point fixe.

Définition 19
Point fixe attractif et répulsif.

Proposition 20
Attractivité, superattraction, répulsion.

Exemple 21
Utilisation des suites récurrentes pour approcher le nombre d'or.

II.B. Application en théorie des équations différentielles linéaires [Berthelin]

Application 22
Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement lipschitzien

Remarque 23
On effectue un changement de norme pour rendre l'application contractante.

II.C. Application en algèbre linéaire [Gourdon]

Lemme 24
Déterminant circulant

Proposition 25
Suite de polygone.

III. Méthodes de résolutions d'équations

III.A. Trouver les zéros d'une fonction [PGCD]

Théorème 26
Méthode de Newton

III.B. Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire [Allaire]

Définition 27
Méthode itérative convergente.

Proposition 28
Convergence des méthodes itératives

Définition 29
Matrice à diagonale strictement dominante, les méthodes de Jacobi et de Gayss-Seidel convergent.

III.C. Recherche d'un minimum [Di Manza]

Théorème 30
Algorithme du gradient à pas optimal.

Références :

-Gourdon Analyse

-Gourdon Algèbre

- El Amrani Suites et séries de fonctions

-PGCD

- Berthelin Equa diff

- Allaire Analyse numérique

-Laurent Di Manza

Table des matières

I Généralités sur les suites récurrentes **1**
I.A Suites récurrentes d'ordre h et 1. 1
I.B Cas des suites récurrentes réelles d'ordre 1 1
I.C Suites récurrentes linéaires à coefficients constants 1
I.D. Quelques familles de suites récurrentes 1

II. Points fixes et suites récurrentes **1**
II.A. Théorème du point fixe 1
II.B. Application en théorie des équations différentielles linéaires 1
II.C. Application en algèbre linéaire 2

III. Méthodes de résolutions d'équations **2**
III.A. Trouver les zéros d'une fonction 2
III.B. Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire 2
III.C. Recherche d'un minimum 2

Leçon n° 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

I Généralités autour de la continuité et de la dérivabilité

I.A) Continuité des fonctions réelles [Rombaldi + Gourdon]

Définition 1 – Continuité

Soit $x \in \mathring{I}$, on dit que f est continue en x si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $y \in I, |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \geq \epsilon$

Proposition 2

$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre stable par la valeur absolue.

Proposition 3

Caractérisation séquentielle de la continuité

Remarque 4

Contre-exemple : $f : x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$ est discontinue en 0, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5

Caractérisation topologie de la continuité

Proposition 6

Prolongement par continuité.

Théorème 7

Si f est monotone sur I alors l'ensemble de ses points de discontinuités est dénombrable.

Application 8

La fonction de répartition admet donc un nombre dénombrable de points de discontinuités : cela permet de montrer la convergence en loi.

Définition 9

Fonctions lipschitziennes

Proposition 10

Les fonctions lipschitziennes sont continues.

Corollaire 11

Les fonctions convexes sont continues sur l'intérieur d'un segment.

Définition 12

Continuité uniforme

Exemple 13

Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues

Théorème 14

Théorème de Heine

Théorème 15

Théorème des bornes atteintes.

I.B. Dérivabilité [Rombaldi]

Définition 16 – Dérivabilité

Fonctions dérivables de classe C^1, C^n et C^∞

Proposition 17

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un DL d'ordre 1 en a.

Remarque 18

La réciproque est fausse pour des ordres supérieurs : $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ admet un DL d'ordre 2 en 0 pourtant la fonction n'est pas deux fois dérivable en 0.

Corollaire 19

Dérivable $\implies$ continue

Remarque 20

La réciproque est fausse.

Proposition 21

Stabilité par composition, somme, produit, formules de la dérivée.

Proposition 22

Dérivée de la fonction réciproque lorsque f' ne s'annule pas.

Proposition 23

Formule de Leibniz

II. Théorèmes fondamentaux des fonctions réelles

II.A. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 24

Si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 25

Théorème des valeurs intermédiaires.

Application 26

Il existe un zéros entre a et b si $f(a)f(b) < 0$; un polynôme de degré impair admet une racine réelle. L'équation $e^{x-3} = \ln(x)$ admet une solution sur $\mathbb{R}$

Théorème 27
Théorème de Darboux

Exemple 28
Les fonctions en escalier n'ont pas de primitive.

II.B. Du théorème de Rolle aux formules de Taylor [Rombaldi+Gourdon+ Zuily-Queffelec]

Proposition 29
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$

Théorème 30 – Théorème de Rolle
Théorème de Rolle

Corollaire 31
Egalité des accroissements finis

Corollaire 32 – Inégalité des accroissements finis

Corollaire 33
Si I est un intervalle et tel que $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante.

Théorème 34
Taylor-Lagrange

Théorème 35
Taylor avec reste intégral.

Théorème 36
Théorème de Bernstein pour les séries entières.

Application 37
Méthode de la phase stationnaire+ application fonction d'Airy.

II.C. Densité des polynômes [Gourdon]

Théorème 38 – Théorème de Weierstrass
$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), \|.\|_\infty$ pour $a < b \in \mathbb{R}$

Remarque 39
Cas où $I = \mathbb{R}$: cela ne fonctionne plus en effet une limite uniforme de polynôme est encore un polynôme (cf Boley)

Application 40
Si $\int_a^b x^n f(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et f continue alors $f = 0$.

III. Théorèmes de passage à la limite

III.A. Suites de fonctions [El Amrani]

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 41
Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Exemple 42
$f_n = x^n$ qui converge sur $[0,1]$vers δ_1 simplement mais pas uniformément.

Application 43
Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Proposition 44
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(I,\mathbb{R})$. Si

$$f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g \qquad \text{et} \qquad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f,$$

alors $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$ et $f' = g$.

Corollaire 45
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^k([a,b],\mathbb{R})$ et si

$$f_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{s} g_p \quad \text{pour } p \le k, \qquad \text{avec} \qquad f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g_k,$$

alors $g_0 \in C^k([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g_0$ et

$$g_0^{(p)} = g_p \quad \text{pour } p \le k.$$

Exemple 46
Importance de la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Alors (f_n) converge uniformément vers $f(x) = |x|$, mais $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$ ne converge pas uniformément vers $f'(x)$, car f n'est pas dérivable en 0.

III.B. Intégrales dépendant d'un paramètre [Briane-Pagès]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est mesuré.

Théorème 47 – Continuité sous le signe intégrale

Exemple 48
On définit : $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Alors Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 49 – Théorème de dérivabilité sous le signe intégrale

Théorème 50 – Théorème de régularité des intégrales à paramètre

Exemple 51
La fonction Γ est de classe C^∞

Références :

— Gourdon Analyse 3ème edition,

— Rombaldi Analyse réelle,

— PGCD,

— Hauchecorne : Les contre-exemples en mathématiques,

— El Amrani Suites et séries de fonctions,

— Walter Appel Proba pour les non probas,

— Briane-Pagès Théorie de l'intégration

— Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation

Table des matières

I Généralités autour de la continuité et de la dérivabilité **1**
I.A Continuité des fonctions réelles [Rombaldi + Gourdon] 1
I.B. Dérivabilité 1

II.Théorèmes fondamentaux des fonctions réelles **1**
II.A. Théorème des valeurs intermédiaires [Rombaldi] 1
II.B. Du théorème de Rolle aux formules de Taylor 2
II.C. Densité des polynômes 2

III. Théorèmes de passage à la limite **2**
III.A. Suites de fonctions 2
III.B. Intégrales dépendant d'un paramètre 2

Leçon n° 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Dans toute la suite, on considérera I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.

I Fonctions monotones

I.A) Généralités [Ramis Deschamps Odoux]

Définition 1

Définition fonctions motones (strict) + ensemble $\mathcal{M}^{\pm}(I)$ (fonctions croissantes ou décroissantes).

Exemple 2

$x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est croissante ?

Proposition 3

Stabilité des fonctions monotones par somme, multiplication par un réel, composition, produit si une des deux est positives, inverse si différent de 0.

Exemple 4

Le produit en général n'est pas monotone ($x \mapsto x$)

Proposition 5

Si f est monotone, f injective si et seulement si strictement monotone.

I.B) Limite et continuité [Ramis Deschamps, Rombaldi, Walter Appel]

Théorème 6 – Théorème de la limite monotone

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une application monotone, a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ (resp $D \cap]-\infty, a[$). Alors f admet une limite, finie ou infinie, à droite (resp à gauche) au point a.

Corollaire 7

Les fonctions monotones admettent des limites finies à droite et à gauche en tout point.

Corollaire 8

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ croissante et a un point adhérent à $D \cap]a, +\infty[$. Alors f admet une limite finie à droite en $a \iff f$ est minorée sur $D \cap]a, +\infty[$

Théorème 9

Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exemple 10

L'application définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante et possède un nombre infini de points de discontinuités.

Application 11

La fonction de répartition d'une variable aléatoire admet donc un nombre dénombrable de points de discontinuités : cela permet de montrer la convergence en loi discrète.

Proposition 12 – Continuité d'une fonction monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone. Alors : f continue sur I $\iff$ $f(I)$ est un intervalle

Corollaire 13 – Théorème des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.

Exemple 14

sin est un homéomorphisme sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et cela permet de définir arcsin.

Dérivabilité et monotonie [Rombaldie]

Théorème 15 – Théorème de Rolle

Théorème 16 – Accroissements finis

Théorème 17 – Lien entre monotonie et signe de la dérivée

Exemple 18

$t \mapsto t^3$ est strictement croissante.

Théorèmes de Dini [Gourdon et Hirsch-Lacombe]

Théorème 19 – Théorèmes de Dini

a) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.
b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Application 20

Existence d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers $|.|$ sur $[-1, 1]$

I.E Applications

Proposition 21

Monotonie des suites réelles récurrentes d'ordre 1.

Proposition 22

Comparaison série-intégrale

Application 23

Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 2.

II.Fonctions convexes

II.A. Généralités [Rombaldi]

Définition 24
Fonctions convexes et concaves

Proposition 25
f convexe $\iff$ $epi(f)$ est convexe.

Exemple 26
$x \mapsto e^x$ est convexe et un produit de fonctions convexes n'est a priori pas toujours convexe.

Proposition 27
La composée d'une fonction convexe croissante et une convexe est encore convexe.

Proposition 28
Une limite simple de fonctions convexes est convexe.

Théorème 29
f est convexe si et seulement si f convexe sur les milieux.

Proposition 30
f est convexe si et seulement si la fonction pente est croissante.

Application 31
Les applications affines sont les applications convexes et concaves.

II.B. Régularité des fontions convexes [Rombaldi, Objectif Agreg]

Proposition 32
Continuité à l'intérieur de l'intervalle (car la fonction y est lipschitzienne)

Théorème 33
Si f est continue et convexe sur $\mathring{I}$, f est convexe sur I.

Proposition 34
Lien entre convexité et croissance dérivée à droite.

Proposition 35
f convexe $\iff$ f' croissante.

Proposition 36
f convexe si et seulement si $f'' \geq 0$ (et cas strict).

Exemple 37
Γ est convexe

Théorème 38
Du théorème de Darboux, on peut en déduire qu'une fonction conveexe dérivabe est continûment dérivable.

Théorème 39
L'ensemble des extrema d'une fonction convexe est convexe.

Corollaire 40
Si f est strictement convexe et admet un extremum alors cet extremum est unique.

Théorème 41
Convergence de la méthode de Newton.

II.C. Quelques inégalités de convexité [Gourdon, Rombaldi, Bernis]

Application 42
Inégalité arithmético-géométrique

Application 43
Inégalité d'Hölder

Application 44
Inégalité de Minkowski

Application 45
Inégalité de Kantorovitch

Théorème 46
Algorithme du gradient à pas optimal.

III. Application aux probabilités [Walter Appel]

Théorème 47
Inégalité de Jensen

Application 48
Inclusion des L^p dans le cadre des convergences L^p.

Définition 49
Fonction génératrice

Proposition 50
Monotonie et convexité de la fonction génératrice.

Références :

— Gourdon Analyse

— Rombaldi Elements d'analyse réelle

— Hirsch-Lacombe Elements d'analyse fonctionnelle

— PGCD

— Bernis 40 devs pour l'agreg

— Topologie et éléments d'analyse Ramis Deschamps Odoux Cours 3

— Objectif Agreg

Table des matières

I Fonctions monotones **1**

I.A Généralités [Ramis Deschamps Odoux] . . . 1

I.B Limite et continuité [Ramis Deschamps, Rombaldi, Walter Appel] . . . 1

I.C. Dérivabilité et monotonie . . . 1

I.D. Théorèmes de Dini [Gourdon et Hirsch-Lacombe] . . . 1

I.E Applications [Gourdon] . . . 1

II.Fonctions convexes **2**

II.A. Généralités [Rombaldi] . . . 2

II.B. Régularité des fontions convexes [Rombaldi, Objectif Agreg] . . . 2

II.C. Quelques inégalités de convexité [Gourdon, Rombaldi, Bernis] . . . 2

III. Application aux probabilités [Walter Appel] **2**

Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

On considère ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notion de série numérique

I.A) Série numérique [Gourdon]

On considère ici $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1
Série terme général, somme partielle, somme infinie quand convergent et reste d'une série.

Proposition 2
Si la série converge, le reste tend vers 0.

Exemple 3
Séries géométriques et expression du reste.

Proposition 4
Critère de Cauchy pour les séries.

Proposition 5
Si la série $\sum u_n$ converge alors $|u_n|$ tend vers 0.

Remarque 6
La réciproque est fausse pour $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Définition 7
Série grossièrement divergente.

Exemple 8
$\sum 2^n$ diverge grossièrement.

Proposition 9
L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ ev.

Définition 10
Série télescopique.

Proposition 11
$\sum(u_n - u_{n-1})$ et $(u_n)_n$ ont même nature (lien suite/série)

Proposition 12
$\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge

I.B. Séries de terme général positif : cas de convergence [Gourdon, El Amrani]

Proposition 13
La série de terme général positive converge si et seulement si elle est majoré.

Théorème 14
Sommation des relations de comparaisons.

Remarque 15
Ce résultat est faux en général si le terme général n'est pas positif.

Proposition 16
Série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$.

Application 17
Critère $n^\alpha u_n$.

Exemple 18
$\sum e^{-n^2}$ converge car $n^2 e^{-n^2}$ tend vers 0.

Proposition 19
Comparaison série-intégrale.

Application 20
Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 2.

Proposition 21
Règle de d'Alembert/Cauchy et Raab-Duhamel.

Application 22
Exemple d'approximation de e par d'Alembert.

Remarque 23
La réciproque du critère de Cauchy est fausse.

II. Séries de terme général quelconque

II.A. Convergence absolue, semi-convergence [Gourdon, El Amrani, Francinou 1]

Définition 24
Séries absolument convergentes.

Proposition 25
Convergence absolue $\implies$ convergence simple.

Remarque 26
La réciproque est fausse. Introduction de la notion de semi-convergence.

Définition 27
Semi-convergence.

Remarque 28
La sommation des relations de comparaison est toujours valable si une est absolument convergente et l'autre de signe constant

Théorème 29
Produit de Cauchy

Théorème 30
Théorème d'arrangement de Riemann

Remarque 31
Permet de comprendre $\sum n = \frac{-1}{12}$

Théorème 32
Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

II.B. Séries alternées et critère d'Abel [El Amrani]

Définition 33
Séries alternées.

Théorème 34
Critère spécial de Leibniz et majoration somme et reste.

Remarque 35
La décroissance est essentielle.

Théorème 36
Critère d'Abel avec transformation d'Abel.

Application 37
$\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ convergent avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

III. Autres techniques de calcul de sommes et de séries

III.A. Séries entières [El Amrani]

Définition 38
Série entière + rayon de convergence.

Proposition 39
Convergence absolue dans le disque ouvert de convergence + CVN

Remarque 40
On ne peut rien sur le disque. Exemples

Théorème 41
Théorème d'Abel radial

Application 42
Calcul de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

III.B. Par les coefficients de Fourier [Gourdon, Francinou 2]

Définition 43
Coefficients de Fourier réels.

Proposition 44
Lien parité et annulation coefficient de Fourier.

Théorème 45
Dirichlet.

Théorème 46
Parseval.

Application 47
Calcul des $\zeta(2k)$

Références :

- Gourdon Analyse

-El Amrani Suites et séries de fonctions

- Francinou Analyse 1 et 2

- Fourier Series and integrals , Dym Mc Kean

Table des matières

I Notion de série numérique **1**

I.A Série numérique [Gourdon] 1

I.B. Séries de terme général positif : cas de convergence 1

II. Séries de terme général quelconque **1**

II.A. Convergence absolue, semi-convergence 1

II.B. Séries alternées et critère d'Abel 2

III. Autres techniques de calcul de sommes et de séries **2**

III.A. Séries entières [Gourdon, El Amrani] 2

III.B. Par les coefficients de Fourier 2

Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Dans la suite, on posera $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

I Construction de l'intégrale et théorèmes d'intégrations

I.A) Cas des fonctions étagées et mesurables positives [Briane]

Définition 1
Définition fonction étagée positive et intégrale

Définition 2
Définition fonction mesurable positive et intégrale.

Lemme 3
Lemme fondamental d'approximation des fonctions mesurables positives par les étagées positives.

Proposition 4
Croissance de l'intégrale

Théorème 5
Convergence monotone.

Théorème 6
L'intégrale est croissante, additive et vérifie la positive homogénéité.

Proposition 7
Si A est de mesure nulle alors $\int_A f d\mu = 0$

Corollaire 8
Si $f = g$ presque partout alors leurs intégrales sont égales.

I.B) Fonctions Lebesgue-intégrable [Briane]

Définition 9
Intégrabilité sur μ et l'espace $L^1(\mu)$.

Exemple 10
Mesure de comptage et $l^1(\mu)$.

Exemple 11
L'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann.

Remarque 12
Toutes les propriétés de l'intégrale restent vraies pour les fonctions intégrables.

I.C. Théorèmes d'intégration [Briane Pagès]

Lemme 13
Lemme de Fatou

Exemple 14
Si des fonctions (f_n) intégrables convergent simplement vers f et si $\sup \int_X f_n d\mu < +\infty$ alors $f \in L^1(\mu)$.

Théorème 15
Théorème de convergence dominée

Remarque 16
$f_n = 1_{[n,n+1]}$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ ne converge pas vers 0, l'hypothèse de domination est cruciale.

Application 17
La suite $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha - 1}$ si $\alpha > 1$.

Application 18
Théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégrale.

Théorème 19
Fubini-Tonelli

Application 20
Calcul de l'intégrale de Gauss par le changement de variable polaire.

Théorème 21
Fubini

Corollaire 22
En utilisant la mesure de comptage on retrouve le théorème de Fubini pour les sommes permettant d'intervertir deux sommes.

II. Espaces L^p

Dans toute la suite, on considère $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué.

II.A. Défintions et premières propriétés [Briane-Pagès, Brézis]

Définition 23
Définition de l'espace $L^p(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$ avec leurs normes associées.

Exemple 24
Non inclusion dans le cas général pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, inclusion si segment ou mesures finies.

Théorème 25
Inégalité de Hölder

Corollaire 26
Inégalité de Minkowski.

Proposition 27
Les espaces sont des espaces vectoriels normés.

Théorème 28 – Riesz-Fisher
Les espaces L^p sont complets.

Proposition 29
La norme $\|.\|_2$ dérive d'un produit scalaire et fait donc de $L^2(\mu)$ un Hilbert.

II.B. Convolution et régularisation [Briane-Pagès, Brézis]

Définition 30
Convolé de fonctions L^1 et L^p ET L^p et L^q.

Proposition 31
$L^1(\mu)$ est une algèbre commutative ne possédant pas d'unité pour la convolution.

Application 32
La densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est la convolé des deux densités respectives.

Définition 33
Suite régularisante

Exemple 34
Noyau de Gauss

Corollaire 35
C_c^∞ est dense dans L^p.

Application 36
$S(\mathbb{R})$ est dense dans L^2.

II.C. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ [El Amrani, Bernis, Queffelec]

Lemme 37
Lemme de Riemann-Lebesgue

Définition 38
Définition transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corollaire 39
La transformée de Fourier est linéaire et continue.

Exemple 40
Transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$, $x \mapsto 1_{[a,b]}$ (c'est donc un exemple de f telle que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$).

Proposition 41
Propriétés de calcul.

Proposition 42
Formule d'inversion.

Proposition 43
Injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 44
Lien entre dérivation et transformée de Fourier

Application 45
Transformée de Fourier de la gaussienne.

Théorème 46
Plancherel et définition de la transformée dans L^2 comme extension de la transformée sur $S(\mathbb{R})$.

Théorème 47
Principe d'incertitude suédois

Théorème 48
Paul-Levy + TCL

Références :

-Briane-Pagès théorie de l'intégration

- Brézis Analyse fonctionnelle

-El Amrani Fourier

- Queffelec Objectif Agreg

-JB Bernis 40 dev pour l'agreg

Table des matières

I Construction de l'intégrale et théorèmes d'intégrations **1**

I.A Cas des fonctions étagées et mesurables positives [Briane] 1

I.B Fonctions Lebesgue-intégrable [Briane] 1

I.C. Théorèmes d'intégration 1

II. Espaces L^p **1**

II.A. Défintions et premières propriétés. 1

II.B. Convolution et régularisation 2

II.C. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ 2

Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

I Suites et séries de fonctions

I.A) Interversion limite-limite [El Amrani, Hauchecorne]

Définition 1
Convergence simple et convergence uniforme.

Exemple 2
Pour $f_n(x) = x^n$, on ne peut pas intervertir les deux limites : $\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1^-} f_n(x)$

Théorème 3 – Théorème de la double-limite

Proposition 4
Si CVU et continue alors la limite est continue

Théorème 5
Théorème de double limite pour les séries de fonctions

Exemple 6
$\zeta(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$.

I.B) Interversion limite-dérivée et dérivée/dérivée [El Amrani, Hauchecorne, PGCD]

Théorème 7
Théorème inversion limite-dérivée.

Exemple 8
ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Remarque 9
L'interversion limite-dérivée est fausse pour $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

Application 10
Différentielle de l'exponentielle matricielle.

Théorème 11 – Théorème de Schwarz

Application 12
La hessienne est symétrique permet d'étudier les extrema d'une fonction.

I.C. Interversion des quantificateurs [Gourdon, Hirsch-Lacombe]

Théorème 13
Théorèmes de Dini.

Théorème 14
Théorème de Heine.

I.D. Interversion limite-intégrale sur un segment [El Amrani, Tauvel]

Théorème 15
Interversion limite-intégrale pour CVU.

Exemple 16
$f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n 1_{[0,n]}$, on calcule l'intégrale quand $n \to +\infty$.

Théorème 17
Si CVU on peut interversion somme et intégrale.

II. Théorèmes d'interversion en théorie de l'intégration

II.A. Les théorèmes fondamentaux [Briane-Pagès]

Théorème 18
Converge monotone.

Corollaire 19
Interversion somme-intégrale dans le cas positif.

Corollaire 20
Lemme de Fatou.

Remarque 21
Utile pour montrer qu'une limite est infinie.

Théorème 22
Convergence dominée.

Exemple 23
Calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{\alpha x} dx$ selon les valeurs de α.

Corollaire 24
Si $\sum \int |f_n| < +\infty$ alors on intervertit somme et intégrale.

II.B. Conséquences sur les intégrales à paramètres [Briane-Pagès]

Théorème 25
Théorème de continuité sous le signe intégrale.

Application 26
La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ est bien définie et continue.

Théorème 27
Dérivabilité sous signe intégral.

Application 28
Transformée de Fourier d'une gaussienne.

Théorème 29
Holomorphie sous le signe intégrale.

Application 30
La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$

II.C. Interversion intégrale-intégrale [El Amrani, Bernis, Briane-Pagès, Francinou Analyse 2]

Théorème 31
Fubini-Tonelli.

Théorème 32
Principe d'incertitude suédois.

Application 33
Intégrale de Gauss.

Théorème 34
Fubini.

Corollaire 35
Interversion somme/somme

Application 36
Calcul des $\zeta(2k)$.

Références :

- Gourdon, Analyse

-Briane-Pagès Théorie de l'intégration

- Hauchecorne Les contre-exemples en mathématiques

- Rouvière PGCD

- El Amrani Suites et séries de foncions

- Tauvel Analyse complexe pour la licence 3

- Hirsch-Lacombe Eléments d'analyse fonctionnelle

- Bernis 40 dév pour l'agreg

- El Amrani Fourier

- Francinou Analyse 2

Table des matières

I Suites et séries de fonctions **1**

I.A Interversion limite-limite [El Amrani, Hauchecorne] 1

I.B Interversion limite-dérivée et dérivée/dérivée [El Amrani, Hauchecorne, PGCD] 1

I.C. Interversion des quantificateurs 1

I.D. Interversion limite-intégrale sur un segment 1

II. Théorèmes d'interversion en théorie de l'intégration **1**

II.A. Les théorèmes fondamentaux 1

II.B. Conséquences sur les intégrales à paramètres 1

II.C. Interversion intégrale-intégrale 2

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

I Intégration des fonctions scalaires d'une ou plusieurs variables

I.A) A l'aide des primitives [Gourdon, Rombaldi]

Théorème 1 – Théorème fondamental de l'analyse

Exemple 2
Intégrale de Riemann

Théorème 3
Décomposition en éléments simples

Application 4
La décomposition en éléments simples perme de trouver la primitive de toute fraction rationnelle

Application 5
Primitive de $x \mapsto \frac{1-x}{(1+x+x^2)^2}$

I.B) A l'aide d'une intégration par parties [Gourdon]

Théorème 6
Intégration par parties

Exemple 7
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

Exemple 8
Formule explicie des intégrales de Wallis

Exemple 9
Relation fonctionnelle de la fonction Γ : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Remarque 10
Mettre en annexe les primitives usuelles (Gourdon)

Application 27
Application à la fonction d'Airy

I.C. En utilisant les théorèmes d'intégration [Briane-Pagès]

Remarque 11
Limite de l'intégrale de Riemann —> mesure de Lebesgues + théorie de l'intégration

Théorème 12
Lemme de Fatou

Corollaire 13
Théorème de convergence monotone

Théorème 14
Théorème de convergence dominée

Exemple 15
Calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{\alpha x} dx$ en fonction de α.

Théorème 16
Théorème de Fubini

Théorème 17
Principe d'incertitude suédois

I.D. Par changement de variable [Gourdon, Garet/Kurtzmann]

Théorème 18
Changement de variable

Remarque 19
Méthode de Bioche (fraction rationnelle en cos et sin)

Exemple 20
Changement de variable polaire + application au calcul de l'intégral de Gauss.

Application 21
Volume de la boule unité euclidienne.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre [Gourdon, Briane-Pagès]

Théorème 22
Continuité sous signe intégral

Application 23
La transformée de Fourier est bien définie et est continue sur $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 24
Dérivabilité sous le signe intégrale

Exemple 25
La fonction Γ est de classe C^∞ et calcul de ses dérivées.

III. Utilisation des fonctions holomorphes [Tauvel, Amar Mathéron]

Théorème 28
Holomorphie sous le signe intégrale

Application 29
La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$

Théorème 30
Théorème des résidus

Application 31
Formule des compléments

Exemple 32
Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle.

Application 33
$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-abs(x)}$

IV. Par approximation numérique [Dantzer]

Proposition 34
Méthode des rectangles

Proposition 35
Estimation de l'erreur

Proposition 36
Méthode du point milieu

Proposition 37
Estimation de l'erreur.

Théorème 26
Méthode de la phase stationnaire

Annexe

Primitives usuelles

Références :

- Gourdon, Analyse

- Rombaldi Algèbre et géométrie

- Tauvel Analyse complexe pour la licence

- Briane-Pagès Théorie de l'intégration

- Garet et Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités

- Amar Mathéron Analyse complexe

- Dantzer Analyse et probabilités

Table des matières

I Intégration des fonctions scalaires d'une ou plusieurs variables **1**

I.A A l'aide des primitives [Gourdon, Rombaldi] 1

I.B A l'aide d'une intégration par parties [Gourdon] 1

I.C. En utilisant les théorèmes d'intégration 1

I.D. Par changement de variable 1

II. Intégrales dépendant d'un paramètre **1**

III. Utilisation des fonctions holomorphes **2**

IV. Par approximation numérique **2**

Leçon n° 239 : Fonctions définies par une intégrale à paramètre. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Dans cette leçon $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et E un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$. On pose alors $F(t) = \int f(t,x)d\mu(x)$

I Régularité et comportement asymptotique

I.A) Continuité [Quéffelec, Analyse pour l'agrégation ; Briane intégration]

Théorème 1 – Contuinité sous le signe intégral

Si f vérifie :

(H1) pour tout $t \in E$, l'application $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.(Mesurabilité en la variable)

(H2) pour presque tout $x \in X$, $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E. (Presque partout continuité en le paramètre)

(H3) Il existe une fonction $\varphi \in L^1(\mu)$ positive, telle que $\forall t \in E$, pour presque tout $x \in X$ $|f(t,x)| \leq \varphi(x)$ (Hypothèse de domination indépendante du paramètre)

Alors l'application

$$\Phi : E \to \mathbb{C}, t \mapsto \int f(t,x)d\mu(x)$$

est bien définie et continue sur E.

Remarque 2

La continuité étant une propriété locale, on peut se restreindre à l'étude sur tout compact de E.

Application 3

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$ alors $\hat{f}$ est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^d$.

I.B) Dérivabilité[Quéffelec Analyse pour l'agrégation, p°320]

On suppose désormais que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 – Dérivation sous le signe intégral

Si f vérifie

(H1) pour tout $t \in I$, l'application $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$.

(H2) Pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ cette dérivée.

(H3) Pour tout compact K de I, il existe une fonction $g \in L^1(X)$ positive indépendante de t, telle que pour μ-presque tout x, $\forall t \in K, |\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$

Alors,

(C1) Pour tout I, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est dans $L^1(X)$

(C2) F est bien définie et est dérivable sur I avec $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$.

On peut généraliser le résultat précédent pour les dérivées d'ordres supérieures.

Théorème 5

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(H1) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$.

(H2) Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, on notera $\frac{\partial^j f}{\partial t^j}$ ses dérivées.

(H3) Pour tout $j = 1, \ldots, k$ et tout compact K de I il existe $g_{j,K} \in L^1(X)$ positive indépendante de t telles que pour presque tout $x \in X, \forall t \in K, |\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)| \leq g_{j,K}(x)$. Alors,

(C1) Pour tout $t \in I$ et tout $j = 1, \ldots, k$, $x \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial t^j}$ est dans $L^1(X)$

(C2) $F \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\forall j \in [\![0,k]\!], F^{(j)}(t) = \int \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)d\mu(x)$

Application 6

Calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne.

Exemple 7

La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.C. Holomorphie et résidus [Objectif Agreg, Amar Mathéron Analyse complexe]

Théorème 8 – Holomorphie sous le signe intégrale

Supposons que E soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(H1) Pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(z,x)$ est dans $L^1(X)$

(H2) Pour presque tout $x \in X$ la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω

(H3) Pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1(X)$ positive indépendante de z telle que pour presque tout $x \in X$, $\forall z \in \Omega, |f(z,x)| \leq g(x)$

Alors, la fonction $F(z) = \int f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)d\mu(x)$.

Application 9

Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$

Théorème 10

Théorème de résidus

Lemme 11

Si $a \in]0,1[$, $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$

Théorème 12 – Formule des compléments

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) \in]0,1[, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

I.D. Comportement asymptotique [PGCD, Analyse pour l'agrégation]

Proposition 13

Soit $I = [a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ des applications continues par morceaux sur I. Alors lorsque $x \to b^-$, on a :

Comparaisons intégrales sur $I = [a,b[$		
$\int_a^b g < +\infty$	$f = o(g)$	$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)$
	$f = O(g)$	$\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$
	$f \sim g$	$\int_x^b f \sim \int_x^b g$
$\int_a^b g = +\infty$	$f = o(g)$	$\int_a^x f = o(\int_a^x g)$
	$f = O(g)$	$\int_a^x f = O(\int_a^x g)$
	$f \sim g$	$\int_a^x f \sim \int_a^x g$

Application 14

$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = o_{x\to+\infty}(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Proposition 15 – Méthode de Laplace

[Petit guide calcul diff p°339]
Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a \le b \le +\infty$). Soit $\varphi : [a,b[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi}$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a,b[$ pour un certain réel t_0. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$, et que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ et $\varphi''(a) > 0$. Alors

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)dx \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 16

Formule de Stirling : $\Gamma(t+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\ (\frac{t}{e})^t$

Théorème 17

Méthode de la phase stationnaire.

II. Processus de régularisation

II.A. Convolution [Briane-Pagès]

On se place désormais sur $E = \mathbb{R}^d$ où d est un entier quelconque. Soit $p \in [1,+\infty]$ et q son exposant conjugué.

Définition 18

On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ lorsque celle-ci est bien définie.

Théorème 19

1. Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f \star g$ existe λ-presque partout et $\|f \star g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_p$
2. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f \star g$ existe pour tout x et $\|f \star g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p,q < +\infty$, alors $\lim_{|x|\to+\infty} f \star g\ (x) = 0$

Proposition 20

La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Le théorème précédent permet donc d'affirmer que $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \star)$ est une algèbre de Banach. Elle est cependant sans unité.

Application 21

La somme de deux variables aléatoires indépendantes, définies sur $\mathbb{R}^d$ et de densités respectives f, g par rapport à la mesure de Lebesgue, a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $f \star g$.

Exemple 22

Si $G_\sigma : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, alors $G_\sigma \star G_{\sigma'} = G_{\sigma+\sigma'}$

Proposition 23

Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1$, alors $f \star g \in \mathcal{C}^k$ avec

$$\forall \alpha, |\alpha| \le k, \partial^k(f \star g) = (\partial^k f) \star g$$

Définition 24 – Approximation de l'unité régularisante

Une suite $(\alpha_n)_n$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{x\ge\varepsilon\}} \alpha_n d\lambda_d = 0$

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\ge1}$ sont de classes $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

Proposition 25

Soient $p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. Alors $f \star \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$

Théorème 26

L'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p pour $1 \le p < +\infty$.

Application 27

Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f \star g$ est uniformément continue.

II.B. Transformée de Fourier [El amrani, JD Bernis]

Définition 28

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\mathcal{F}(f) : \zeta \mapsto \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\, dx$$

Définition 29

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{f}$ l'application $x \to f(-x)$.

Proposition 30

$\mathcal{F}$ est linéaire et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est uniformément continue et bornée.

Proposition 31

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : (L^1, \|\|_1) \to (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\|_\infty)$ est une application linéaire continue.

Lemme 32 – Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$

Proposition 33

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
2. Si τ_h est l'opérateur de translation par $h \in \mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{F}(\tau_h f) = e^{-i\langle h, . \rangle}\mathcal{F}(f)$
3. Pour $\lambda > 0, \mathcal{F}(f(\frac{.}{\lambda})) = \lambda^d \hat{f}(\lambda .)$

Application 34

La transformée de Fourier d'une Gaussienne est encore une Gaussienne. On a $\hat{G_\sigma} : \xi \mapsto e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

Proposition 35 – Formule de dualité

Corollaire 36

La transformée de Fourier est injective

Théorème 37 – Principe d'incertitude suédois

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $A = \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B = \{t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$. Alors $f = 0$ λ presque partout.

Définition 38 – Espace de Schwarzt

On définit la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, comme l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(f) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\beta \, \partial^\alpha f(x) \right| < +\infty$$

Exemple 39

On a $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $G_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 40

L'espace de SCHWARZT est stable par la transformée de Fourier.

Proposition 41

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet et s'injecte continument dans les L^p, dans lesquels il est dense pour $p < +\infty$

Proposition 42

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, multiplication interne, multiplication par un polynôme (ces opérations étant continues).

Proposition 43

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\zeta) = i^{|\alpha|} \, \zeta^\alpha \, \mathcal{F}(f)(\zeta) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x^\beta f)(\zeta) = i^{|\beta|} \, \partial^\beta \mathcal{F}(f)(\zeta)$$

Proposition 44

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \, \widehat{\widehat{f}}(-x) \quad \text{p.p.}$$

En particulier f est égale p.p. à une fonction $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 45 – Inversion de Fourier dans l'espace de SCHWARZT

$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un automorphisme continu et on a $F^{-1} : f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \, \mathcal{F}(\check{f})$.

Théorème 46 – Théorème de Fourier-Plancherel

$\mathcal{F}$ se prolonge en un unique opérateur (encore noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même vérifiant :

- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \check{Id}$
- pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d), \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \left\| \hat{f} \right\|_{L^2}^2$
- pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx$

II.C. Transformée de Fourier en probabilité [Walter Appel Proba pour les non probas, Analyse pour l'agrégation]

Définition 47 – Fonction caractéristique

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X, notée ϕ_X, la transformée de Fourier conjuguée de la loi $\mathbb{P}_X$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})$$

Remarque 48

Il s'agit de la transformée de Fourier dans le cadre d'une mesure de probabilité.

Exemple 49

Fonction caractéristique d'une gaussienne

Définition 50

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que X_n converge en loi vers X, notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction continue bornée f :

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

Théorème 51 – Théorème de Lévy

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle, alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X(t)$$

Théorème 52 – Théorème central limite

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable. En notant $\mu := \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Bibliographie

- El Amrani transformée de Fourier

- Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation

-Gourdon Analyse

- Rouvière Petit guide du calcul diff

-Briane-Pagès Théorie de l'intégration

- Francinou Analyse 3

- Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes

- Amar Mathéron Analyse complexe

- JB Bernis 40 dev Analyse

Table des matières

I Régularité et comportement asymptotique **1**

I.A Continuité [Quéffelec, Analyse pour l'agrégation ; Briane intégration] . . . 1

I.B Dérivabilité [Quéffelec Analyse pour l'agrégation, p°320] . . . 1

I.C. Holomorphie et résidus . . . 1

I.D. Comportement asymptotique . . . 2

II. Produit de convolution **2**

II.A. Convolution . . . 2

II.B. Transformée de Fourier . . . 2

II.C. Transformée de Fourier en probabilité . . . 3

Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et applications.

Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

Soit $(E, \|\|)$ un evn de dimension fini (donc complet) et X un ensemble.

I Modes de convergence

I.A) Suites de fonctions

Définition 1
Convergence simple

Remarque 2
La limite est alors unique.

Définition 3
Convergence uniforme.

Exemple 4
$x \mapsto x^n$ converge simplement mais pas uniformément (sauf un segment du type $[0, a]$ où $a < 1$) + convergence simple de $(1 - \frac{x}{n})^n$ vers e^{-x}.

Proposition 5
Critère de Cauchy uniforme.

Application 6
Si une suite de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la limite est un polynôme.

Définition 7
On pose $B(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées et on le munit de $\|\|_\infty$.

Proposition 8
$(f_n)_n$ converge uniformément $\iff \|f - f_n\|_\infty \to 0$.

Remarque 9
En étudiant la norme infinie on a donc un critère pour montrer qu'une suite de fonction ne converge pas uniformément.

Exemple 10
$x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Proposition 11
$(B(X, E), \|\|_\infty)$ est complet.

Théorème 12
Premier théorème de Dini.

Application 13
Il existe une suite de polynôme converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|\mathring{u}|$.

Théorème 14
Théorème de Stone-Weierstrass.

I.B. Séries de fonctions [El Amrani, Gourdon]

Définition 15
Série de fonctions

Définition 16
Converge simple et uniforme pour les séries de fonctions + reste

Proposition 17
Si $\sum f_n$ CVU alors f_n CVU vers 0.

Proposition 18
$\sum f_n$ CVU $\iff$ le reste de la série CVU vers 0.

Exemple 19
Cas de $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$

Définition 20
Convergence normale

Exemple 21
$\sum xe^{-nx}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Proposition 22
CVN $\implies$ CVU $\implies$ CVS

I.C. Cas des séries entières [Gourdon, El Amarani]

Définition 23
Série entière

Lemme 24
Lemme d'Abel + définition du rayon de convergence.

Théorème 25
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors $x \mapsto \sum a_n x^n$ converge normalement sur tout disque de rayon $r < R$.

Proposition 26
Règle de d'Alembert + règle de Cauchy

Exemple 27
Mettre des exemples

II. Régularités de la limite

II.A. Continuité [El Amrani]

Soit X une partie non vide d'un evn F.

Théorème 28
La convergence uniforme préserve la continuité.

Théorème 29
Théorème de la double limite.

Remarque 30
Réécriture dans le cas des séries de fonctions.

Exemple 31
$\sum \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$

Remarque 32
Il existe des fonctions continues nulle part dérivable (cf fonction de Weierstrass)

II.B. Dérivabilité [PGCD, El Amrani]

Théorème 33
Dérivation des suites de fonctions.

Remarque 34
Réécriture dans le cas des séries de fonctions.

Remarque 35
On peut le réécrire pour les fonctions de classe C^p.

Exemple 36
La fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Théorème 37
Interversion limite-différentielle.

Application 38
Différentielle de l'exponentielle matricielle.

II.C. Intégration des séries de fonctions [El Amrani]

Théorème 39
Convergence uniforme et interversion limite intégrale

Théorème 40
Théorème d'inversion série intégrale.

Application 41
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$

III. Application aux séries de Fourier [Gourdon, Bernis, El Amrani, Queffelec, Francinou 2]

Définition 42
Définition des coefficients de Fourier.

Définition 43
Séries de Fourier.

Proposition 44
Parité de la fonction et lien avec l'annulation des coefficients de Fourier réels.

Théorème 45
Théorème de Dirichlet

Application 46
Expression des $\zeta(2k)$

Théorème 47
La série de Fourier converge normalement si la fonction est continue et $C^1_{pm}(\mathbb{R})$.

Théorème 48
Principe d'incertitude suédois.

Théorème 49
Théorème de Lévy + TCL

Application 50
Intervalle de confiance.

Références :

- El Amrani Suites et séries de fonctions

- El Amrani Analyse de Fourier

- Gourdon Analyse

- PGCD Rouvière

- JB Bernis 40 dev Analyse

- Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation

- Francinou Analyse 2

Table des matières

I Modes de convergence **1**
I.A Suites de fonctions 1
I.B. Séries de fonctions 1
I.C. Cas des séries entières 1

II. Régularités de la limite **2**
II.A. Continuité 2
II.B. Dérivabilité 2
II.C. Intégration des séries de fonctions 2

III. Application aux séries de Fourier **2**

Leçon n° 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Généralités

I.A) Séries entières, disque de convergence [El Amrani]

Définition 1
Série entière

Définition 2
Rayon de convergence et disque de convergence

Lemme 3 – Lemme d'Abel
Convergence absolue dans le disque de convergence et diverge grossière sinon, convergence normale dans un disque strictement inclus.

Exemple 4
$\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Remarque 5
Sur le bord du disque ouvert de convergence toutes les situations sont possibles. (considérer les séries $\sum z^n, \sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

Théorème 6
Règle de d'Alembert

Exemple 7
Calcul du rayon de convergence de $\sum \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$

Théorème 8
Règle de Cauchy et d'Hadamard

Exemple 9
La série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ a pour rayon de convergence 2.

I.B) Opérations sur les séries entières [El Amrani, Gourdon]

Proposition 10
Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

Théorème 11
Stabilité de la somme et du produit et rayons de convergences associés.

Exemple 12
Cas où le rayon est $+\infty$ alors que les deux séries de départ ont un rayon de convergence fini.

Théorème 13
Inverse d'une série entière

II. Régularité de la somme

II.A. Régularité sur le disque de convergence [Gourdon]

Théorème 14
Holomorphe dans le disque

Corollaire 15
Unicité des coefficients et valeurs : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Théorème 16
La fonction à variable réelle associée est de classe C^∞.

Exemple 17
Série primitive

Application 18
DSE de $arctan, arcsin, arcos$ et $\ln(1+.)$

II.B. Régularité sur le cercle d'incertitude [Gourdon]

Théorème 19
Théorème d'Abel Angulaire (faire un dessin en annexe)

III. Fonctions développables en série entière

III.A. Sur $\mathbb{C}$ [Tauvel, Francinou 2]

Définition 20
DSE au voisinage d'un point, fonctions analytiques

Exemple 21
$z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$

Théorème 22
Formule de Cauchy

Corollaire 23
Les fonctions holomorphes sont analytiques.

Application 24
Calcul des $\zeta(2k)$ avec les nombres de Bernouilli

Proposition 25
Principe des zéros isolés

Remarque 26
On retrouve l'unicité du DSE grâce à cette propriété

Théorème 27
Théorème de Liouville

Corollaire 28
Théorème de d'Alembert-Gauss

III.B. Sur $\mathbb{R}$ [Gourdon]

Définition 29
DSE au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$.

Exemple 30
La fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas DSE en 0.

Proposition 31
Condition suffisante pour être DSE en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 32
DSE si et seulement si le reste CVS vers 0.

Théorème 33
Théorème de Bernstein

IV. Applications

IV.A. Utilisation en dénombrement [Gourdon Algèbre Proba]

Définition 34
Série génératrice et série exponentielle

Remarque 35
Une relation de récurrence entre les termes de la suite se traduit par une équation fonctionnelle vérifiée par la série génératrice.

Application 36
Nombre de dérangement, nombres de Bell

IV.B. Résolution d'équations différentielles [Francinou 4, Zuily-Queffelec]

Remarque 37
Peut être pertinent de regarder les solutions DSE d'une équa diff

Théorème 38
Résoudre $y'' + py' + qy = 0$ avec DSE

Application 39
Résolution de l'équation d'Airy : $y'' + xy = 0, y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

IV.C. La fonction génératrice en probabilités [Walter]

Définition 40
Fonction génératrice

Théorème 41
Les différentes propriétés de la fonction génératrice

Théorème 42
Récupération des moments

Application 43
Indécomposabilité de la loi de Poisson

Remarque 44
Mettre en annexe un tableau avec les fonctions génératrices classiques.

Annexe :

ccccc

Loi	**Paramètres**	**Fonction génératrice** $G_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$p \in [0,1]$	$G_X(t) = (1-p) + pt$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$n \in \mathbb{N},\ p \in [0,1]$	$G_X(t) = (1-p+pt)^n$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$p \in (0,1]$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\lambda > 0$	$G_X(t) = \exp(\lambda(t-1))$	λ	λ
Uniforme discrète	$\{1,\dots,n\}$	$G_X(t) = \dfrac{t(t^n-1)}{n(t-1)}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$

Références :

- El Amrani Suites et séries de fonctions

- Gourdon Analyse ; Algèbre et Proba

- Tauvel Analyse complexe pour la licence 3

- Francinou Analyse 2 et 4

- Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation

- Walter Appel, Proba pour les non Probas

Leçon n° 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application.

I Généralités sur l'holomorphie

I.A) Définitions et premières propriétés [Tauvel]

Définition 1

Soit $w \in U$. On dit que f est :

- $\mathbb{C}$-dérivable en w lorsque l'application $z \in U/\{w\} \mapsto \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \in \mathbb{C}$,admet une limite en w. Dans ce cas, on note $f'(w)$ la limite de cette application en w.
- holomorphe sur U lorsque f est $\mathbb{C}-$dérivable en tout point de U. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.
- entière si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2

Les polynômes sont des fonctions entières. En revanche $z \mapsto \bar{z}$ n'est nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

Proposition 3

$\mathcal{H}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire.

Proposition 4

Si $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ sont holomorphes alors $g \circ f$ l'est également. De plus $\forall w \in U,\ (g \circ f)'(w) = g'(f(w)) \times f'(w)$.

I.B) Holomorphie et analyse réelle [Tauvel]

Remarque 5

En notant $P(x,y) = Re(f(x+iy)), Q(x,y) = Im(f(x+iy))$ et $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+iy \in U\}$ on peut envisager f comme une fonction $\tilde{f} : O \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$

Proposition 6

L'application f est holomorphe sur U si, et seulement si :

1. f différentiable sur O
2. et f vérifie les équations de Cauchy-Riemann : $\forall (x,y) \in O, \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{cases}$

Corollaire 7

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$, on a : $f' = 0 \implies f = constante$ sur U.

Corollaire 8

Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ où U ouvert connexe on a :
f constante sur U
$\iff$ $Re(f)$ constante sur U
$\iff$ $Im(f)$ constante sur U
$\iff$ $|f|$ constante sur U
$\iff$ $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$.

I.C. Fonction analytique et holomorphie [Tauvel]

Définition 9

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite analytique s'il est développable en série entière en tout point de U, ou encore si $\forall z_0 \in U$, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0, \exists V$voisinage de z_0 dans U tel que $\forall z \in V, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

On notera $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U.

Proposition 10

$\mathcal{A}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Théorème 11

Une fonction développable en série entière est holomorphe sur le disque de convergence et la dérivée est la dérivée terme à terme.

Remarque 12

On peut appliquer le même raisonnement à f', on peut alors en déduire que f est indéfinement $\mathbb{C}$-dérivable sur le disque ouvert de convergence.

Corollaire 13

$\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$.

Exemple 14

Holomorphie de $\exp, \sin, \cos$ sur $\mathbb{C}$, analyticité de $z \mapsto \frac{1}{(a-z)^p}$ sur $D(a, |a|)$.

II. Intégrales sur les chemins et lien avec l'holomorphie

II.A. Intégrale sur un chemin et formule de Cauchy [Tauvel]

Définition 15

Définition de l'indice

Proposition 16

Propriétés sur l'indice

Exemple 17

Lacet égal au cercle de centre a et de rayon R : $\gamma_{a,R} : t \mapsto a + Re^{it}$, l'indice d'un point dans le disque est 1 et dans l'extérieur c'est 0.

Théorème 18
Théorème de Goursat

Théorème 19
Formule de Cauchy dans un convexe

Corollaire 20
Formule de Cauchy dans un cercle

II.B. Applications de la formule de Cauchy

Théorème 21
Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 22
Inégalités de Cauchy

Corollaire 23
Théorème de Liouville : Toute fonction entière bornée est constante.

Application 24
Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 25
Principe du maximum global.

II.C. Primitives et logarithmes [Tauvel, Queffelec Analyse complexe pour l'agrégation]

Proposition 26
Toute fonction sur un disque admet une primitive holomorphe.

Corollaire 27
Toute fonction holomorphe admet localement des primitives

Corollaire 28
Une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur $\mathcal{U}$ ouvert étoilé admet un logarithme sur $\mathcal{U}$.

Application 29
indécomposabilité de la loi de Poisson.

II.D. Convergence de suites de fonctions holomorphes [Tauvel]

Théorème 30
Holomorphie stable par convergence uniforme sur tout compact.

Exemple 31
La fonction ζ est bien définie

Théorème 32
Holomorphie sous le signe intégral

Exemple 33
La fonction Γ est bien définie sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$

II.E. Prolongement des fonctions holomorphes [Tauvel, Objectif Agreg]

Théorème 34
Théorème des zéros isolés

Corollaire 35
Prolongement analytique

Application 36
La fonction Γ se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et calcul des résidus.

III. Méromorphie et théorème des résidus [Tauvel, Amar-Mathéron]

Définition 37
Les différentes singularités isolées (effaçables, pôle, essentielle).

Proposition 38
Définition équivalentes des différentes singularités

Définition 39
Fonctions méromorphes

Théorème 40
Formule de Cauchy dans un couronne

Corollaire 41
Développement en série de Laurent

Remarque 42
Lien entre série de Laurent et singularités

Définition 43
Résidu de f en a

Proposition 44
Formules de calcul des résidus

Théorème 45
Théorèmes des résidus.

Application 46
Formule des compléments

Références :

- Tauvel Analyse complexe pour la licence

- Beck, Objectif Agreg

- Amar-Mathéron Analyse complexe

- Queffelec Analyse complexe pour l'agrégation.

Table des matières

I Généralités sur l'holomorphie **1**

I.A Définitions et premières propriétés [Tauvel] . . . 1

I.B Holomorphie et analyse réelle [Tauvel] . . . 1

I.C. Fonction analytique et holomorphie . . . 1

II. Intégrales sur les chemins et lien avec l'holomorphie **1**

II.A. Intégrale sur un chemin et formule de Cauchy . . . 1

II.B. Applications de la formule de Cauchy . . . 2

II.C. Primitives et logarithmes . . . 2

II.D. Convergence de suites de fonctions holomorphes . . . 2

II.E. Prolongement des fonctions holomorphes . . . 2

III. Méromorphie et théorème des résidus **2**

Leçon n° 246 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Coefficients et séries de Fourier

I.A) Résultats préliminaires [El Amrani]

Définition 1
$C^0_{2\pi}, L^p_{2\pi}, L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert avec son produit scalaire associé.

Définition 2
$e_n(x) = e^{inx}$ et définition polynôme trigonométriques

Théorème 3
L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C^0_{2\pi}$

Proposition 4
$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

I.B) Séries de Fourier [El Amrani]

Définition 5
Coefficients de Fourier complexes

Remarque 6
Dans $L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$

Définition 7
Produit de convolution dans $L^1_{2\pi}$

Proposition 8
Toutes les propriétés de calcul des coefficients de Fourier.

Lemme 9 – Lemme de Riemann Lebesgue

Corollaire 10
Si f est de classe C^k alors $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$ et si $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$ alors f est de classe C^{k-2}.

Remarque 11
Au plus la fonction f est régulière au plus les coefficients de Fourier décroissent vite.

Définition 12
Coefficients de Fourier réels.

Remarque 13
Relation avec $c_n(f)$.

Proposition 14
Lien entre parité de la fonction f et la nullité des coefficients de Fourier réels.

Définition 15
Séries de Fourier et sommes partielles.

I.C. Sommes de Césaro et noyaux trigonométriques [El Amrani]

Définition 16
Somme de Césaro

Définition 17
Convergence au sens de Césaro

Définition 18
Noyau de Dirichlet.

Proposition 19
Propriétés sur les noyaux de Dirichlet

Définition 20
Noyau de Féjer.

Proposition 21
Propriétés sur les noyaux de Féjer et son lien avec le noyau de Dirichlet.

II. Convergence des séries de Fourier

Théorème 22
Si f est L^1 et que la série converge alors c'est la série de Fourier.

II.A. Convergence au sens de Césaro [El Amrani]

Théorème 23
Théorème de Féjer.

Application 24
Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique.

Théorème 25
Injectivité des séries de Fourier.

Proposition 26
$\mathcal{F} : L^1 \to c_0(\mathbb{Z})$ est linéaire continue injective de norme 1.

II.B. Convergence en moyenne quadratique [El Amrani]

Théorème 27
Parseval

Remarque 28
Réécriture avec les coefficients réels.

II.C. Convergence ponctuelle et uniforme [Gourdon, El Amrani]

Théorème 29
Jordan-Dirichlet

Corollaire 30
Dirichlet

Théorème 31
La série de Fourier converge normalement si la fonction est continue et de classe C^1_{pm}.

Application 32
Calcul de $\zeta(2), \zeta(4)$.

Théorème 33
Banach-Steinhaus + application à une fonction continue, 2π périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

III. Applications des séries de Fourier

III.A. Applications aux séries [El Amrani, Francinou 2]

Théorème 34
Calcul des $\zeta(2k)$

III.B. Lien entre transformée de Fourier continue et discrète [Bernis, El Amrani]

Proposition 35
Formule sommatoire de Poisson.

Corollaire 36
Identité de Jacobi

Théorème 37
Principe d'incertitude suédois.

Références :

- El Amrani Analyse de Fourier

- Gourdon Analyse

- JB Bernis 40 devs agreg 2ND EDITIOn

- Francinou analyse 2

Table des matières

I Coefficients et séries de Fourier **1**
I.A Résultats préliminaires [El Amrani] . . . 1
I.B Séries de Fourier [El Amrani] . . . 1
I.C. Sommes de Césaro et noyaux trigonométriques . . . 1

II. Convergence des séries de Fourier **1**
II.A. Convergence au sens de Césaro . . . 1
II.B. Convergence en moyenne quadratique . . . 2
II.C. Convergence ponctuelle et uniforme . . . 2

III. Applications des séries de Fourier **2**
III.A. Applications aux séries . . . 2
III.B. Lien entre transformée de Fourier continue et discrète . . . 2

250. Transformée de Fourier et Applications

Lever Hugo, Piroutet Alban

Agrégation de Mathématiques — 2025

I Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

I.A) Définitions et premières propriétés [El Amrani]

Définition 1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle transformée de Fourier (conjuguée) de f l'application $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ ($\overline{\mathcal{F}}(f)$) défini par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx \text{ et } \bar{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}dx$$

où <.,.> désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$

Remarque 2

Il existe des variantes dans la définition de Fourier, on peut par exemple avoir :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx \text{ ou } \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

Les propriétés d'une définition à une autre restent les mêmes à une constante près.

Lemme 3 – Riemann-Lebesgue

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$$

Théorème 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors :

1. (i) $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$.
2. (ii) $\widehat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$
3. (iii) $\mathcal{F}$ est linéaire

Remarque 5

Autrement dit, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ dans $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple 6

Si $a < b$,

$$\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}e^{-i(a+b)\xi/2} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ b-a \quad \text{si} \quad \xi = 0 \end{cases}$$

en particulier, on remarque que $\mathcal{F}(\chi_{[a,b]}) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, ainsi $\mathcal{F}$ n'opère pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 7

Soit $a > 0$:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

I.B. Convolution et théorème d'inversion [El Amrani, Bernis]

Définition 8

Définition et convolution dans L^1.

Proposition 9

Lien entre convolution et produit.

Définition 10

Approximation de l'unité.

Exemple 11

Noyau de Gauss

Proposition 12

Régularisation avec noyau.

Proposition 13

Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, :

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

Application 14

Il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 15 – Formule de dualité

Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(u)g(u)\mathrm{d}u$$

Corollaire 16

La transformation de Fourier est injective.

Théorème 17

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^d f(-x)$$

Autrement dit, on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

Remarque 18

$\mathcal{F}$ induit un automorphisme sur l'espace $\{f \in L^1(\mathbb{R}^d), \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$, cependant ce résultat est peu satisfaisant car une telle fonction f appartient nécessairement à $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Application 19

Soit $a > 0$:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(t) = \frac{\pi}{a}e^{-a|t|}$$

Proposition 20

Si $f, \widehat{f}$ et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a :

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{f} * \widehat{g}$$

Théorème 21 – Principe d'incertitude suédois

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Soient $A = \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B = \{t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$. Alors $f = 0$ λ presque partout.

Théorème 22

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

Application 23

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \pi$$

I.C. Dérivation

Proposition 24

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $j \in [\![1, d]\!]$ tels que $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$$

Proposition 25

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $x \mapsto x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \widehat{f}$ continue et bornée dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_j \mathcal{F}(f)(\xi) = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi)$$

Application 26

Soit $a > 0$, on a :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

II Extension de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $S(\mathbb{R})$

II.A) Dans $S(\mathbb{R})$

Définition 27

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à **décroissance rapide** (à l'infini) si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \lim_{\|x\| \to +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$$

Exemple 28

La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$ ainsi que toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Proposition 29

Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est à décroissance rapide, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, D^\alpha f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.

Définition 30

On appelle espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$
- f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide

Remarque 31

Les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ et tendent vers 0 à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées.

Proposition 32

L'espace de Schwarz est un espace vectoriel et est stable par multiplication par un polynôme et produit.

Théorème 33

L'espace de Schwarz $S(\mathbb{R})$ est stable par la transformée de Fourier.

Théorème 34

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a la relation

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\mathcal{F}}$$

II.B. Dans $L^2(\mathbb{R})$ [El Amrani]

Proposition 35

$S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 36

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors :
- Il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
- Pour une telle suite (f_n), la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 37

La limite $\tilde{f}$ est appelée la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 38

On a bien étendu la définition dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors, avec les notations précédentes : $\mathcal{F}(f) = \tilde{f}$.

Remarque 39

Il n'y a pas de formulation intègrale lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus L^1(\mathbb{R}^d)$

Théorème 40

Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\tilde{f}g$ et $f\tilde{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(u)g(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\tilde{g}(v)\mathrm{d}v$$

III.Applications

III.A. En probabilités [Walter, Zuily-Queffelec]

Définition 41

Convergence en loi.

Définition 42

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X, notée ϕ_X, la transformée de Fourier conjuguée de la loi $\mathbb{P}_X$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}(e^{i\langle t,X\rangle})$$

Remarque 43

Des propriétés de la transformée de Fourier ϕ_X est bien défini car $\mathbb{P}$ est une mesure finie. De plus, ϕ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 44

Si X et Y sont deux variables aléatoires, on déduit de l'injectivité de la transformée de Fourier :

$$X = Y \Leftrightarrow \phi_X = \phi_Y$$

Proposition 45

Si X admet une densité f, alors :

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle x,t\rangle} dx$$

Proposition 46

Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre N, alors la fonction caractéristique de X est de classe $\mathcal{C}^N$ et vérifie :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$$

Lemme 47

On note $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ont une limite nulle lorsque $|x| \to \infty$.
Alors, $(X_n)_n$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$

Théorème 48 – Théorème de Lévy

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle, alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X(t)$$

Corollaire 49

(Théorème Centrale-limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable. En notant $\mu := \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Références :

- El Amrani Analyse de Fourier

- Walter Appel Proba pour les non Proba

- Bernis 40 devs pour l'agreg

- Zuiley-Queffelec Analyse pour l'agrégation

Table des matières

I Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ **1**

I.A Définitions et premières propriétés [El Amrani] . . . 1

I.B. Convolution et théorème d'inversion . . . 1

I.C. Dérivation [El Amrani] . . . 2

II Extension de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $S(\mathbb{R})$ **2**

II.A Dans $S(\mathbb{R})$ . . . 2

II.B. Dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . 2

IV. Applications **3**

IV.A. En probabilités . . . 3

Leçon n° 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

I Généralités sur la convexité

I.A) Premières définitions et propriétés [Objectif Agreg, Gourdon, Rombaldi]

Définition 1
Partie convexe

Exemple 2
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes, les boules dans $\mathbb{R}^n$ sont convexes.

Exemple 3
Les demi-espaces sont convexes.

Proposition 4
Une intersection de convexe est convexe.

Définition 5
Enveloppe convexe d'une partie.

Théorème 6
Théorème de Carathéodory

Définition 7
Fonctions convexes, strictement convexes (concave, strictement concave)

Proposition 8
f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe + dessin annexe.

Proposition 9
Si les $(f_i)_{i\in I}$ sont convexes alor $\sup_{i\in I} f_i$ est convexe.

Proposition 10
Une fonction convexe est continue sur l'intérieur du domaine (car y est lipschitzienne) et admet des dérivées à gauche et à droite.

Théorème 11
Caractérisation de la convexité si f est dérivable et si f est deux fois dérivable.

Exemple 12
exp est convexe et ln est concave.

Théorème 13
Caractérisations en dimension supérieure de la convexité

Application 14
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est convexe si et seulement si A est positive.

I.B. Inégalités de convexité [Gourdon, Rombaldi]

Proposition 15
Inégalité arithmético-géométrique

Théorème 16
Inégalité de Hölder

Corollaire 17
Inégalité de Minkowski et donc $\|\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 18
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$.

I.C. Recherche d'extrema [Objectif Agreg, PGCD, Objectif Agreg, Bernis, Francinou Analyse 4]

Proposition 19
Si f est convexe, les minimums de f forment un ensemble convexe.

Théorème 20
Lorsque la fonction f est strictement convexe et admet un minimum, alors ce minimum est unique.

Exemple 21
L'existence d'un minimum n'est pas toujours assurée : considérer exp qui est strictement convexe

Proposition 22
Fonction convexe coercive etc...

Application 23
Point de Fermat.

Proposition 24
Méthode de Newton

Application 25
Méthode du gradient à pas optimal + application à la résolution d'un système linéaire.

II. Exemples d'applications dans certains espaces

II.A. Dans les espaces de Hilbert [Hirsch-Lacombe, Zuily Queffelec]

Théorème 26
Théorème de projection sur un convexe fermé.

Corollaire 27
Si F est un sev fermé de H alors p_F est linéaire, continue et $1-$lipschitzienne.

Corollaire 28
Si F est un sev fermé de H alors $H = F \bigoplus F^{\perp}$.

Application 29
Existence de l'espérance conditionnelle sur L^2.

Théorème 30
Théorème de représentation de Riesz.

Application 31
Existence de l'adjoint dans un Hilbert

II.B. Dans les espaces L^p [Briane-Pagès]

Définition 32
Espaces L^p et leurs normes associées pour $p \in [1, +\infty]$

Théorème 33
Inégalité de Hölder

Corollaire 34
Inégalité de Minkowski

Proposition 35
$(L^p(\mu), \|\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Application 36
Inclusion des L^p si l'espace est de mesure finie, et non inclusion dans le cadre général.

Proposition 37
Inégalité de Jensen

Remarque 38
On retrouve le cas discret

II.C. Applications aux probabilités [Walter]

Proposition 39
Inégalité de Jensen

Application 40
Implication des convergence L^p en proba

Proposition 41
Inégalité de Hoeffding

Définition 42
Fonction génératrice

Proposition 43
Les propriétés des fonctions génératrices.

Application 44
Galton-Watson

Références :

- Francinou Analyse 4 ou Bernis

- Beck, Objectif Agreg

- Rombaldi Elements d'analyse réelle

-PGCD

-Hirsch-Lacombe

-Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation

- Briane-Pagès Théorie de l'intégration

- Walter Appel Proba pour les non proba

- Gourdon Analyse

Table des matières

I Généralités sur la convexité **1**

I.A Premières définitions et propriétés [Objectif Agreg, Gourdon, Rombaldi] 1

I.B. Inégalités de convexité 1

I.C. Recherche d'extrema 1

II. Exemples d'applications dans certains espaces **1**

II.A. Dans les espaces de Hilbert 1

II.B. Dans les espaces L^p 2

II.C. Applications aux probabilités 2

Leçon n° 261 : Loi d'une variable aléatoire Caractérisations. Exemples. Applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace euclidien.

I Loi d'une variable aléatoire

I.A) Premières définitions [Chabanol/Ruch, Ouvrard]

Définition 1
Variable aléatoire (réelle, discrète)

Définition 2
Loi d'une variable aléatoire

Remarque 3
$P_X(B) = P(X \in B)$, $P_X(\{k\}) = P(X = k)$

Remarque 4
Si X est discrète, $(P(X = k))_k$ caractérise la loi de X.

Définition 5
On dit que X suit la loi de probabilité μ si μ est une mesure de probabilité et $P_X = \mu$.

Définition 6
Variable à densité

Théorème 7
Radon-Nikodyn

Corollaire 8
La densité caractérise la loi.

I.B) Cas des vecteurs aléatoires, indépendance [Chabanol-Ruch]

On prend ici $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires définies chacunes sur n espces probabilisé a priori différents et on note $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Définition 9
Loi conjointe et $i-$ème lois marginales

Proposition 10
Connaître la loi conjointe c'est connaître les lois marginales (pour discret et à densité).

Remarque 12
Si X et Y sont à densité, (X, Y) n'est pas forcément à densité ?

Définition 13
Variables indépendantes

Théorème 14
$X_1, \dots, X_n$ indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

Proposition 15
Si X et Y sont indépendantes alors $f_{(X,Y)} = f_X * f_Y$ et pareil pour le cas discret

Application 16
Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\varepsilon(\lambda)$ alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

Définition 17
Convergence en loi.

I.C. Lois usuelles [Chabanol-Ruch]

Tableau de toutes les lois et leurs interprétations

II. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire

II.A. Fonction Muette [Chabanol-Ruch]

Définition 18
Espérance

Théorème 19
Théorème de transfert

Définition 20
Moment d'ordre k.

Proposition 21
Fonction muette : si pour tout f mesurable bornée $\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x)g(x)dx$ alors X est à densité de densité g.

Remarque 22
Permet le calcul de lois en pratique.

II.B. Fonction de répartition [Chabanol-Ruch, Walter Appel]

Définition 23
Fonction de répartition

Proposition 24
La fonction de répartition est croissante, continue à droite et calcul des limites aux extrémités.

Proposition 25
La fonction de répartition caractérise la loi.

Remarque 11

La réciproque est fausse : considérer (X, Y) qui mesure le jet de deux dés.

Proposition 26

Pour une variable aléatoire de fonction de répartition F, d'inverse généralisé noté $F^{<-1>}$ et si U est uniforme sur $[0, 1]$ alors $X = F^{<-1>}(U)$ admet pour fonction de répartition F.

Remarque 27

Si la fonction de répartition est C^1 on dérive pour obtenir la densité.

Application 28

Si X uniforme sur $[0, 1]$ alors on peut déterminer la densité de $Y = X^2$ en dérivant la fonction de répartition.

II.C. Fonction caractéristique [Chabanol-Ruch]

Définition 29

Fonction caractéristique

Proposition 30

La fonction caractéristique caractérise la loi.

Exemple 31

Fonction caractéristique de la gaussienne.

Théorème 32

Théorème de Paul-Levy

II.D. Fonction génératrice [Walter Appel]

Définition 33

Fonction génératrice pour les variables aléatoires discrètes

Proposition 34

La fonction génératrice caractérise la loi

Proposition 35

Toutes les propriétés de la fonction génératrice.

Proposition 36

Récupération des moments

Théorème 37

Indécomposabilité de la loi de Poisson

III. Théorème central limite [Walter Appel]

Théorème 38

Théorème central limite

Application 39

Méthode de Monte-Carlo

Références :

- Chabanol/Ruch Probabilités et statistiques

- Ouvrard Proba 2

- Walter Appel Proba pour les non Proba

- Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation + Analyse complexe pour l'agrégation

Table des matières

I Loi d'une variable aléatoire **1**

I.A Premières définitions [Chabanol/Ruch, Ouvrard] 1

I.B Cas des vecteurs aléatoires, indépendance [Chabanol-Ruch] 1

I.C. Lois usuelles 1

II. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire **1**

III. Théorème central limite [Walter Appel] **2**

Leçon n° 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I Modes de convergence

I.A) Convergence presque sûre

Définition 1
Convergence presque sûre.

Proposition 2
Linéarité de la convergence presque sûre.

Lemme 3
Lemme de Borel-Cantelli

Théorème 4
CNS pour avoir convergence presque sûre d'une suite de variables aléatoires.

Corollaire 5
Conditions suffisantes pratiques pour vérifier la convergence sûre

Théorème 6
Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ et proba de retour

I.B) Convergence en probabilité

Définition 7
Définition de la convergence en probabilité

Exemple 8
$(X_n)_n$ suite tel que $Var(X_n) \to 0$, alors (X_n) converge en proba vers 0.

Proposition 9
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \mathbb{E}[\min(X_n - X, 1)] \to 0.$

Proposition 10
Si f continue et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

Remarque 11
On ne connaît pas nécessairement la variable aléatoire limite d'où le critère de Cauchy uniforme suivant.

Proposition 12
Critère de Cauchy pour la convergence en probabilité.

Théorème 13
Convergence presque sûre $\implies$ convergence en probabilité

Exemple 14
La réciproque est fausse pour $X_n = \mathcal{B}(\frac{1}{n})$.

Proposition 15
Réciproqur partielle avec sous-suite.

I.C. Convergence L^p

Définition 16
Convergence L^p

Proposition 17
Implication des convergences L^p.

Théorème 18
Convergence L^p $\implies$ convergence en probabilité.

Exemple 19
La réciproque est fausse : si X_n est de loi $\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$ alors (X_n) converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas L^1 vers 0.

I.D. Equi-intégrabilité et réciproque partielle

Définition 20
Equi-intégrabilité

Proposition 21
Exemple d'un cas uniformément majoré par un variabl aléatoire intégrable.

Théorème 22
Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $\{|X_n|^p\}$ uniformément intégrable alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

I.E. Convergence en loi

Définition 23
Définition de la convergence en loi

Proposition 24
Si f est continue et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$

Proposition 25
Convergence en proba $\implies$ convergence en loi.

Remarque 26

La réciproque est fausse car a priori les variables aléatoires ne sont pas nécessairement définies sur le même espace probabilisé, la convergence en loi est une convergence de mesures.

Remarque 27

Annexe avec toues les modes de convergence leurs implications et leurs réciproques partielles.

Théorème 28

Slutsky

II. Théorèmes limites

Théorème 29

Loi forte des grands nombres

Application 30

Méthode de Monte-Carlo pour calculer numériquement une intégrale.

Théorème 31

Théorème de Paul-Lévy

Théorème 32

Théorème central limite.

Application 33

Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Références :

- Walter Appel Probabilités pour les non-probabilistes
- Zuily Queffelec Analyse pour l'agrégation

Table des matières

I Modes de convergence **1**

I.A Convergence presque sûre 1

I.B Convergence en probabilité 1

I.C. Convergence L^p 1

I.D. Equi-intégrabilité et réciproque partielle 1

I.E. Convergence en loi 1

II. Théorèmes limites **2**

Leçon n° 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable.

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.A) Caractérisation d'une variable aléatoire discrète [Chabanol-Ruch]

Définition 1
Variable aléatoire discrète.

Proposition 2
La loi d'une variable aléatoire discrète est caractérisée par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$

Exemple 3
La variable aléatoire donnant le score d'un dé est une variable aléatoire discrète car à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$

I.B) Lois discrètes usuelles et interprétation [Chabanol-Ruch]

Tableau contenant toutes les lois, notations et interprétations : uniforme, bernouilli, binomiale, Poisson, géométrique

I.C) Variables aléatoires discrètes indépendantes [Chabanol-Ruch]

On prend ici $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires dans un n espaces probabilisés.

Définition 4
Variables indépendantes

Proposition 5
Variables indépendantes dans le cas discret.

Proposition 6 – Lemme des coalitions
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $g_1, \dots, g_n$ sont mesurables alors $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.

Proposition 7
Calcul de la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes discrètes.

Application 8
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Et si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

II.Moments et fonctions génératrices

II.A. Moments d'ordre k [Chabanol-Ruch]

Définition 9
Espérance discrète

Remarque 10
Si B est mesurable alors si $X = 1_B$, on a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(B)$.

Proposition 11
$\mathbb{E}$ est linéaire et positive.

Remarque 12
$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ (il faut être discret).

Proposition 13
Formule de transfert.

Définition 14
Moment d'ordre k, espace L^k, variance et écart-type.

Remarque 15
Interprétation de l'espérance et de la variance.

Proposition 16
Inclusion des L^k (car ici espace de mesure finie) et donc des moments.

Proposition 17
Propriétés de la variance

Exemple 18
Calcul des espérances et variances des lois usuelles.

II.B. Fonctions génératrices [Chabanol-Ruch, Walter Appel]

Définition 19
Fonction génératrice

Proposition 20
La fonction génératrice est de rayon de convergence au moins égal à 1.

Exemple 21
Fonction génératrice des lois usuelles.

Proposition 22
Si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Application 23
Indécomposabilité de la loi de Poisson

Proposition 24

Toutes les propriétés de la fonction génératrice.

Proposition 25

Récupération des moments.

III. Vers les théorèmes limites

III.A. Borel-Cantelli [Walter Appel]

Définition 26

Limite supérieure d'événements

Lemme 27

Lemmes de Borel-Cantelli

Application 28

La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont récurrentes : on calcule $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et comme les séries divergent dans les deux cas, on a le résultat par Borel-Cantelli.

Théorème 29

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$.

III.B. Convergence en loi et TCL [Walter Appel]

Définition 30

Convergence en loi

Proposition 31

Si les variables aléatoires sont discrètes alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$

Application 32

Approximation binomiale-Poisson : Si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Théorème 33 – TCL

Théorème central lmite.

Application 34

Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Références :

— Walter Appel, Proba pour les non probas
— Chabanol-Ruch Probabilités et statistiques

Table des matières

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes **1**
I.A Caractérisation d'une variable aléatoire discrète [Chabanol-Ruch] . . . 1
I.B Lois discrètes usuelles et interprétation [Chabanol-Ruch] . . . 1
I.C Variables aléatoires discrètes indépendantes [Chabanol-Ruch] . . . 1

II.Moments et fonctions génératrices **1**
II.A. Moments d'ordre k . . . 1
II.B. Fonctions génératrices . . . 1

III. Vers les théorèmes limites **2**
III.A. Borel-Cantelli . . . 2
III.B. Convergence en loi et TCL . . . 2

Leçon n° 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

Piroutet Alban

28 juillet 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I Notion d'indépendance

I.A) Evénements indépendants [GK, Walter, Chabanol]

Définition 1
Probabilité conditionnelle

Théorème 2
Formule des probas totales

Théorème 3
Formule de Baies

Remarque 4
C'est une mesure de probabilité

Définition 5
Evénements deux à deux indépendants

Exemple 6
On lance deux pièces A : "La première pièce fait face", B : "La deuxième fait pile", C : "On a le même résultat sur les deux pièces" alors A, B et C sont indépendants deux à deux

Définition 7
Evénements mutuellement indépendants

Remarque 8
Dans l'exemple précédent les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 9
Si $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants alors $(B_i)_i$ où $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ sont indépendants.

Application 10
Calcul probabiliste de $\varphi(n) = n\prod_{i\in I}(1-\frac{1}{p_i})$

I.B) Indépendance de tribus et de variables aléatoires [GK, Walter, Chabanol]

Définition 11
Indépendance de tribus

Définition 12
Mutuelle indépendance de variables aléatoires

Théorème 13 – Lemme des coalitions
Si $(X_i)_i$ sont mutuellement indépendantes et $(f_i)_i$ mesurables alors $(f_i(X_i))$ sont indépendantes.

Exemple 14
Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et $ch(Y)$ sont indépendantes.

Remarque 15
X_1, X_2 les deux va donnant le résultat du lancer des deux pièces alors X_1, X_2 et $X_1 - X_2$ ne sont mutuellement indépendantes.

Proposition 16
Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ sont indépendantes si, et seulement si la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la tribu produit $\mathcal{E}_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{E}_n$) est le produit des lois de $X_1, \dots, X_n$ c'est à dire :

$$\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$$

Définition 17 – Inverse généralisée d'une fonction de répartition
Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante, continue à droite, dont la limite est nulle en $-\infty$ et vaut 1 en $+\infty$. On suppose que sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose :

$$F^*(u) = \inf(\{s \in \mathbb{R}, F(s) > u\})$$

Alors F^* a comme fonction de répartition F.

II. Premières propriétés autour de l'indépendance

II.A. Critères d'indépendances [GK, Walter, Chabanol, Walter]

Théorème 18
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Remarque 19
Si les variables aléatoires sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées.

Remarque 20
Réciproque fausse avec X loi uniforme sur $[-1,1]$ et $Y = X^2$, elles sont décorrélées mais pas indépendantes.

Corollaire 21
Si X et Y sont indépendantes alors $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Proposition 22
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si, et seulement si, la densité du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est le produit des densités des X_i.

Si X et Y sont indépendantes à densité alors (X, Y) est à densité.

Théorème 23

Soient X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définies sur le même espace probabilisé. On suppose que (X, Y) admet une densité h avec $h(x, y) = f(x)g(y)$ où f et g sont des fonctions positives. Alors X et Y sont indépendantes, de plus X admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{||f||_1}$

II.B. Sommes de variables aléatoires [Chabanol, Krutzmann, Queffelec]

Proposition 24

Si indépendantes $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

Application 25

Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Si X et Y sont indépendantes de loi respective $\Gamma(r, \lambda)$, resp $\Gamma(s, \lambda)$ alors $X + Y$ a comme loi $\Gamma(r + s, \lambda)$

Proposition 26

Si X et Y indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Application 27

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Application 28

Indécomposabilité de la loi de Poisson.

Proposition 29

Si $X_1, \dots, X_n$ et N indépendantes alors $G_{\sum_{k=1}^{N} X_k} = G_N \circ G_{X_1}$

III. Théorèmes limites

III.A. Borel-Cantelli [Walter]

Proposition 30 – Lemmes de Borel-Cantelli

Application 31

La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont récurrentes : on calcule $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et comme les séries divergent dans les deux cas on a le résultat par Borel-Cantelli.

III.B. Loi des grands nombres [Walter, Krutzmann, Chabanol, Queffelec]

Théorème 32

Loi faible des grands nombres.

Théorème 33

Loi forte des grands nombres. Version plus faible avec moment d'ordre 4.

Application 34

$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur fortement consistant.

III.C. Théorème central limite [Chabanol, Queffelec, Walter, Krutzmann]

Théorème 35 – Théorème de Paul-Levy

Théorème 36 – Théorème central limite

Références :
— Chabanol/ Ruch Proba et stat pour l'épreuve de modé
— Garet/Kurtzmann De l'intégration aux probabilités
— Walter Appel Proba pour les non probas
— Analyse pour l'agrégation Zuily-Queffelec
— Objectif Agreg Queffelec
— Analyse complexe et application Queffelec

Table des matières

I Notion d'indépendance **1**
I.A Evénements indépendants [GK, Walter, Chabanol] 1
I.B Indépendance de tribus et de variables aléatoires [GK, Walter, Chabanol] 1

II. Premières propriétés autour de l'indépendance **1**
II.A. Critères d'indépendances [GK, Walter, Chabanol, Walter] 1
II.B. Sommes de variables aléatoires [Chabanol, Krutzmann, Queffelec] 2

III. Théorèmes limites **2**
III.A. Borel-Cantelli [Walter] 2
III.B. Loi des grands nombres [Walter, Krutzmann, Chabanol, Queffelec] 2
III.C.Théorème central limite [Chabanol, Queffelec, Walter, Krutzmann] 2