Fiche de Khôlle

Séries numériques

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Série numérique **Khôlle n° : 1**

Questions de cours

Enoncer et démontrer le critère spécial des séries alternées

I. Exercice 1

On se propose d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. Montrer que la série est convergente.

(On pourra penser à appliquer le critère spécial des séries alternées)

II. Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose f_n défnie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \frac{nx(1-x)}{n^2x^2 + (1-x)^2}$$

et l'intégrale : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Etudier les variations de la fonction f_n sur $[0,1]$.
2. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_n$.
3. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$.
4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n^2$.

III. Exercice 3

Donner la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{H_n+(-1)^n}$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sin(\pi n + \pi(\sqrt{n^2+1} - n)) = (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n)) = (-1)^n \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \in [0, \pi]$, donc $\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n)}) \geq 0$. De plus la suite $(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})_n$ est décroissante et converge vers 0. A partir de $n = 1$, $\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel sin est croissante et continue. Finalement la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante de limite nulle. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées.

Exercice 2 : 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$, comme fraction rationnelle n'admettant pas de pôle réel. De plus :

$$\forall x \in [0, 1], f_n'(x) = -\frac{n((n-1)x+1)((n+1)x-1)}{(n^2x^2 + (1-x)^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

On découpe l'intégrale I_n :

$I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nx(1-x)}{n^2x^2+(1-x)^2}dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{nx(1-x)}{n^2x^2+(1-x)^2}dx$. Dans le premier terme, on majore la fonction à intégrer par $\frac{1}{2}$. Dans le deuxième terme, on minore la dénominateur par n^2x^2. Ainsi $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1-x}{nx}dx$. Autrement dit, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2n}$. Par théorème des gendarmes, $(I_n)_n$ converge vers 0.

3) Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n^2} \leq 1$ donc $I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+\frac{1}{n^2}(1-x)^2}dx \geq \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}dx$. Posons $K = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+(1-x^2)}dx$, on a $I_n \geq \frac{K}{n}$ et la série harmonique diverge, donc la série $\sum I_n$ diverge.

4) On a montré que $0 \leq I_n \leq M_n$ où $M_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2n}$. On a $M_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$. On en déduit que $0 \leq I_n^2 \leq M_n^2$ avec $M_n^2 \sim \frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$. Par comparaison de séries à termes positives, $\sum I_n^2$ converge.

Exercice 3 :

Les $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sont les sommes partielles de la série harmonique. $(H_n)_n$ est croissante et $H_n \sim \ln(n)$, en effet on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale. On a :

$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$. En sommant pour $2 \leq k \leq n$, on a : $\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n)$.

Comme $H_n + (-1)^n \sim H_n$, on peut imaginer dans un premier temps que la série de terme général u_n sera de même nature que la série de terme général v_n où $v_n = \frac{(-1)^n}{H_n}$. Comme H_n est positive, croissante de limite $+\infty$, la série $\sum v_n$ est alternée donc convergente. Posons, pour $n \geq 1, w_n = v_n - u_n$. Si la série $\sum u_n$ était convergente alors $\sum w_n$ le serait aussi.

Cependant : $w_n = \frac{(-1)^n(H_n+(-1)^n)-(-1)^n H_n}{H_n(H_n+(-1)^n)} = \frac{1}{H_n(H_n+(-1)^n)}$. Par ce qui précède, on a $w_n \geq 0$ et $w_n \sim \frac{1}{\ln(n)^2}$. Or pour n assez grand $\frac{1}{\ln(n)^2} \geq \frac{1}{n}$, la série $\sum w_n$ est divergente, ce qui est absurde. Ainsi $\sum u_n$ est divergente.

Fiche de Khôlle

Séries numériques

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Série numérique **Khôlle n° : 1**

Questions de cours

Enoncer et démontrer la règle de D'Alembert. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$

I. Exercice 1

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2}$

II. Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. On pose $w_n = \sum_{p=1}^{n} pu_p$. Démontrer que la série $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$ converge.

III. Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et l'on suppose que $u_n S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

1. Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$. Indication : On pourra s'intéresser à la suite télescopique $S_n^2 - S_{n-1}^2$.

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

On utilise une décomposition en éléments simples : $\frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{2n}(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n-k})$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n-k}) = \frac{1}{2n}(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}) = \frac{1}{2n}(\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) = \frac{1}{2n}(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n})$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} \sim \ln(2n-1) \sim \ln(2n) \sim \ln(n)$ et donc $\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$. Finalement $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2} \sim \frac{\ln(n)}{2n}$

Exercice 2 :

On calcule les sommes partielles :

$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{w_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{n} \frac{pu_p}{n(n+1)} = \sum_{p=1}^{N} pu_p \sum_{n=p}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{p=1}^{N} pu_p(\frac{1}{p} - \frac{1}{N+1}) \leq \sum_{p=1}^{N} u_p$. Or la série $\sum pu_p$ converge ainsi la suite des sommes partielles est majorée et la série est à terme positif donc elle converge.

Exercice 3 :

1) La suite $(S_n)_n$ est croissante et à termes strictement positifs. Si elle converge, en notant l sa limite $l > 0$, on a : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}$. Or $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est absurde. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus $u_n \sim \frac{1}{S_n}$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n^2 - S_{n-1}^2 = (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = u_n(2S_n - u_n) = 2u_nS_n - u_n^2$. Par opérations sur les limites, on en déduit : $S_n^2 - S_{n-1}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \neq 0$ donc $S_n^2 - S_{n-1}^2 \sim 2$. Comme 2 est le terme général positif d'une série divergente, par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (S_k^2 - S_{k-1}^2) \sim 2n \text{ donc } S_n^2 - S_0^2 = 2n + o(n)$$

Ainsi, on obtient $S_n^2 \sim 2n$ puis par positivité de S_n, $S_n \sim \sqrt{2n}$ donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Fiche de Khôlle

Séries numériques

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Série numérique **Khôlle n° : 1**

Questions de cours

Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison et prouver le cas o cas convergent.

I. Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. En utilisant une comparaison série intégrale, étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$

II. Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$. On pose $v_n = 2^n v_n$.

1. Montrer l'existence d'un réel $l > 0$, que l'on ne cherchera pas à calculer, tel que $u_n \sim \frac{l}{2^n}$. (Indication : On pourra utiliser la concavité de arctan et étudier la série télescopique $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$
2. Déterminer un développement à deux termes de u_n. On pourra étudier le terme télescopique $v_{n+1} - v_n$.

III. Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim -\ln(u_n)$.

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

Posons $f : x \in [2, +\infty[\to \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et on montre facilement que $f' \leq 0$ donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$ et aussi positive et continue sur ce même intervalle. Par ailleurs, puisque $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int^x f(t)dt = \frac{(\ln(x))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cas $\alpha \in]0, 1[$. Par comparaison série-intégrale, pour tout $n \geq 2$, on a : $\sum_{k=2}^{n} f(k) \geq f(n) + \int_2^n f(t)dt \geq \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Soit u_n le membre de droite. Comme $1-\alpha > 0$, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et par théorème de comparaison, la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ diverge vers $+\infty$.

Cas $\alpha > 1$: On a alors $\frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge et, comme f est positive, elle est intégrable sur $[2, +\infty[$. Par comparaison série-intégrale, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ est convergente. Exercice 2 :

On calcule les sommes partielles :

$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{w_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{n} \frac{pu_p}{n(n+1)} = \sum_{p=1}^{N} pu_p \sum_{n=p}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{p=1}^{N} pu_p(\frac{1}{p} - \frac{1}{N+1}) \leq \sum_{p=1}^{N} u_p$. Or la série $\sum pu_p$ converge ainsi la suite des sommes partielles est majorée et la série est à terme positif donc elle converge.

Exercice 2 :

Par concavité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction arctan, on a : $\forall x > 0, 0 < \arctan x \leq x$. Par récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$. Ainsi $u_n = O(\frac{1}{2^n})$ et en particulier, $(u_n)_n$ converge vers 0. Comme $\arctan x \sim_0 x$, on a $\frac{\arctan u_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ensuite, on a $\ln x \sim_1 x-1$ et $\arctan t - t \sim_0 \frac{-t^3}{3}$. Donc $\ln(\frac{v_{n+1}}{v_n}) = \ln(\frac{\arctan u_n}{u_n}) \sim \frac{\arctan u_n}{u_n} - 1 = \frac{\arctan u_n - u_n}{u_n} \sim -\frac{u_n^2}{3}$. On en déduit que $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O(\frac{1}{4^n})$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ est convergente, donc la suite $(\ln(v_n))_n$ est convergente. Soit λ sa limite, par continuité de la fonction exponentielle en λ, la suite $(v_n)_n$ converge vers e^λ, en posant $l = e^\lambda$, on a le résultat.

2) D'après la question précédente, on a $u_n^3 = \frac{l^3}{8^n} + o(\frac{1}{8^n})$, on a donc : $v_{n+1} - v_n = 2^n(\arctan(u_n) - u_n) = 2^n(-\frac{1}{3}u_n^3 + o(u_n^3)) = -\frac{l^3}{3}\frac{1}{4^n} + o(\frac{1}{4^n})$. Par théorème de sommation des relations de comparaisons (cas convergent), on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(v_{k+1} - v_k) = \frac{-l^3}{3}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{4^k} + o(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{4^k}) \text{ donc } l - 2^n u_n = \frac{-l^3}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\frac{1}{4^n} + o(\frac{1}{4^n})$$

Au final, $u_n = \frac{l}{2^n} + \frac{4l^3}{9}\frac{1}{8^n} + o(\frac{1}{8^n})$

Exercice 3 :

Comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, on a $\ln(\frac{u_{k+1}}{u_k}) \sim \frac{u_{k+1}}{u_k} - 1 = \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k}$. Par comparaison de séries à termes négatifs, les séries $\sum \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})$ et $\sum \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k}$ sont de même nature. Or $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$, donc la série $\sum \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})$ diverge. Par sommation des relations de comparaison (cas divergent) on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} \sim \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = \ln(u_n) - \ln(u_0)$$

On a $\ln(u_n) - \ln(u_0) \sim \ln(u_n)$ car $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$. Finalement, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} \sim -\ln(u_n)$.