Fiche de Khôlle

Intégration

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Intégration **Khôlle n° : 3**

Dans cette feuille $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours

Enoncer et démontrer le théorème de comparaison par inégalité pour les fonctions positives.

I. Exercice 1

Etudier l'existence des intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x} dx$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

II. Exercice 2

On étudie ici, en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la nature de l'intégrale de Bertrand : $B_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx$

1. Etablir la convergence de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha > 1$.
2. Etablir la divergence de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha < 1$.
3. Faire l'étude de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha = 1$.

III. Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie si, et seulement si, la fonction $x \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$ admet une limite en $+\infty$ et qu'alors ces limites sont égales.

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue positive sur $[1, +\infty[$, et on a $\forall x \in [1, +\infty[, |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$, donc par critère de Riemann en $+\infty$ avec 2>1, le théorème de majoration des fonctions positives assure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ est convergente.

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x} dx$ est continue positive sur $[1, +\infty[$, avec la méthode de la quantité conjuguée, on a $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})} \sim_{+\infty} \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$. Ainsi par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en $+\infty$ avec $\frac{3}{2} > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x} dx$ est bien convergente.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue positive sur $[2, +\infty[$ avec, $\forall X \geq 2, \int_2^X \frac{1}{x\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx$ est divergente.

Exercice 2 :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, posons $f_{\alpha,\beta} : x \in [2, +\infty[\mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$. Alors $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_{\alpha,\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

1) Si $\alpha > 1$, alors on peut trouver $\gamma \in]1, \alpha[$ et $\frac{x^\gamma}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha-\gamma}(\ln(x))^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (car $\alpha - \gamma > 0$ et croissances comparées), ainsi $f_{\alpha,\beta}(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x^\gamma})$ ainsi par comparaison de fonctions continues positives et critère de Riemann avec $\gamma > 1$, l'intégrale de $B_{\alpha,\beta}$ est absolument convergente donc convergente.

2) On suppose désormais que $\alpha < 1$, on a alors $1 - \alpha > 0$ et par croissances comparées on a : $\frac{(\ln(x))^\beta}{x^{1-\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ autrement dit $\frac{1}{x} = o(f_{\alpha,\beta}(x))$. Par comparaison avec le critère de Riemann, on déduit alors que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable et par positivité de $f_{\alpha,\beta}$, on en déduit que $B_{\alpha,\beta}$ est divergente.

3) Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, on a $\int_2^X \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx = [\frac{\ln(x)^{1-\beta}}{1-\beta}]_2^X = \frac{\ln(X)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta}$. Ainsi si $\beta < 1, \int_2^X \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta} < +\infty$ donc $B_{1,\beta}$ est convergente pour $\beta > 1$. De même pour $\beta < 1$ on en déduit que $B_{1,\beta} = +\infty$. Enfin, pour $\alpha = \beta = 1, B_{1,1} = [\ln(\ln(x))]_2^{+\infty} = +\infty$.

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$, on considère $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ et $G : x \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$.

Il est clair que F est bien définie car f est continue pour G on verra plus tard.

Supposons que $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note l. Autrement dit , $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = l$. Commençons par prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$ converge. On a par une intégration par parties : $\int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt = [\frac{F(t)}{t^2}]_1^x + 2\int_1^x \frac{F(t)}{t^3} dt (**)$. Comme $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ admet une limite finie, d'une part $\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^2} = 0$ et d'autre part $\frac{F(t)}{t^3} = O(\frac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto \frac{F(t)}{t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison, ce qui prouve la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$.

De la relation (**), on déduit : $\forall x \geq 1, A(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt = -\frac{F(x)}{x} + 2x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt$. Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} = l$, on a :

$$\frac{F(t)}{t^3} - \frac{l}{t^2} = o(\frac{1}{t^2})$$

puis par intégration des relations de comparaison (cas convergent) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt - \frac{l}{x} = \int_x^{+\infty} (\frac{F(t)}{t^3} - \frac{l}{t^2}) dt = o(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}) = o(\frac{1}{x}).$$

Ce qui prouve : $\lim_{x\to+\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt = l$ et donc $\lim_{x\to+\infty} A(x) = l$.

Réciproquement,

Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} xG(x) = l$.

Alors $f(x) = -x^2G'(x)$ et, par une intégration par parties, on a

$$B(x) := \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{x}[-t^2G(t)]_1^x + \frac{2}{x}\int_1^x tG(t)dt = \frac{G(1)}{x} - xG(x) + \frac{2}{x}\int_1^x tG(t)dt.$$

Comme $tG(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l$, on a $tG(t) - l = o(1)$ puis, par intégration des relations de comparaison (cas divergent) :

$$\int_1^x tG(t)dt - l(x-1) = \int_1^x (tG(t) - l)dt = o(x)$$

Ce qui donne $\lim_{x\to+\infty} B(x) = l$.

Fiche de Khôlle

Intégration

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Intégration **Khôlle n° : 3**

Dans cette feuille $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours

Donner la définition d'intégrale convergente pour des fonctions continues par morceaux sur des intervalles de la forme $[a, b[$ et des propriétés importantes.

I. Exercice 1

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrable $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\sin(u)}} du$

II. Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On définit f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^2}$.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{j=1}^{+\infty}(\ln(j+1) - \ln(j) - \frac{1}{j+1}) < +\infty$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers $1 - \int_1^{+\infty} f(t)dt$

III. Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs positives et décroissante. Montrer que $f(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x})$

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ est bien définie et continue positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\sin(u)}} du = 2[\sqrt{\sin(u)}]_x^{\frac{\pi}{2}} = 2 - 2\sqrt{\sin(x)} - \xrightarrow[x\to 0]{} 2 < +\infty$.

Exercice 2 :

Par définition de la partie entière, $\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \lfloor t \rfloor \in [0, 1]$ donc $\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, ainsi par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est bien convergente.

De plus, on a d'après la relation de Chasles que $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f(t)dt$. Or $\forall t \in [j, j+1], \lfloor t \rfloor = j$ donc $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f(t)dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} \frac{t-j}{t^2} dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} (\frac{1}{t} - \frac{j}{t^2})dt = \sum_{j=1}^{+\infty} (\ln(\frac{j+1}{j}) - \frac{1}{j+1})$ ce qui donne le résultat.

Sinon, on a $\ln(\frac{j+1}{j}) - \frac{1}{j+1} = \ln(1 + \frac{1}{j}) - \frac{1}{j+1} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} + O(\frac{1}{j^2}) = O(\frac{1}{j^2})$ donc par critère de Riemann la série converge et donc l'intégrale est convergente.

2) On reprend le calcul précédent :

$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(\frac{j+1}{j}) - \frac{1}{j+1}) = \lim_{n\to+\infty} (\ln(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - u_n)$.

Exercice 3 :

1) D'après la relation de Chasles : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{\frac{x}{2}} f(t)dt$, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, notons $l = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt = l - l = 0$.

2) Comme f est positive et décroissante, on peut écrire $\forall x \geq 0, 0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt$, on déduit de la première question que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} f(x) = 0$ d'où $f(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x})$.

Fiche de Khôlle

Intégration

Piroutet Alban - Lycée Châteaubriand

Date : 17/09/26

Thème : Intégration **Khôlle n° : 3**

Dans cette feuille $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours

Enoncer le théorème d'intégration par parties.

I. Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n est convergente.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
3. Calculer I_n.

II. Exercice 2

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$.

1. Montrer que $\forall x > 0$, l'intégrale $f(x)$ est convergente.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

III. Exercice 3

Soit $\alpha > 0$, on pose $f : x \mapsto xe^{-x^\alpha \sin^2(x)}$.

1. Donner la nature, selon α, de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \displaystyle\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.
2. onner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Bon courage pour la khôlle !

Correction

Exercice 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$, alors f_n est une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$, de plus $f_n(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}$ donc par critère de Riemann avec $2n \geq 2 > 1$, et par comparaison de fonctions positives I_n est absolument convergente donc convergente.

2) On fait la technique du banquier et une intégration par parties :

On a $\forall n \geq 1, \int_0^x f_{n+1}(t)dt = \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}dt}$ On fait une IPP dans la dernière intégrale : $\int_0^x f_{n+1}(t)dt = \int_0^x f_n(t)dt + [\frac{t}{2n(1+t^2)^n}]_0^x - \frac{1}{2n}\int_0^x f_n(t)dt$. Or $\frac{x}{2n(1+x^2)^n} \to 0$ quand x tend vers 0. Ainsi par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.

3) Comme $I_1 = \frac{\pi}{2}$, on déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi$.

Exercice 2 :

1) Soit $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+x}$ est continue positive sur $[0, +\infty[$, de plus $\frac{e^{-t}}{t+x} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ par croissances comparées, ainsi par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann l'intégrale définissant f est absolument convergente donc convergente.

2) Soit $x > 0$, on effectue le changement de variable $u = t + x$, on a $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}dt = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du \sim_0 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$. Or d'après la relation de Chasles :

$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du = \int_1^x \frac{e^{-u}}{u}du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$ avec la dernière intégrale convergente. Or $\frac{e^{-u}}{u} \sim_0 \frac{1}{u}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{u}du$ divergente, donc par intégration des relations de comparaison (cas divergent), on a

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}du \sim_0 \int_x^1 \frac{du}{u} = -\ln(x)$$

. D'où $f(x) \sim_0 -\ln(x)$.

Exercice 3 :

1) La fonction $\sin^2$ est π périodique, ainsi par changement de variable, on a $u_n = \int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^\alpha \sin^2(x)}dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t+n\pi)e^{-(t+n\pi)^\alpha \sin^2(t)}dt$, or par concavité de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$. Par imparité de la même fonction, pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin(t)| \leq |t|$ donc $\frac{4}{\pi^2}t^2 \leq \sin^2(t) \leq t^2$, on en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, m_n := (n-1)\pi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-((n+1)\pi)^\alpha t^2}dt \leq u_n \leq M_n := (n+1)\pi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-((n+1)\pi)^\alpha \frac{4t^2}{\pi^2}}dt$.

Or pour $a > 0, \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-at^2}dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\pi\sqrt{a}/2}^{\pi\sqrt{a}/2} e^{-u^2}du \sim_{a\to+\infty} \frac{I}{\sqrt{a}}$ où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du$.

On en déduit que $m_n \sim (n-1)\pi \frac{I}{((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \sim \frac{I\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et de même $M_n \sim \frac{I\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{2n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$.

Par comparaison de séries de Riemann, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$ ie $\alpha > 4$.

2) La fonction f étant à valeurs positives, on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$, qui a même nature que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f$ a aussi même nature que $\sum u_n$.